Απαντήσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής 2013

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 28
Α.2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 14
Α.3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 87
Α.4. α. $\rightarrow$ **Λ** **β.** $\rightarrow$ **Σ** **γ.** $\rightarrow$ **Λ** **δ.** $\rightarrow$ **Λ** **ε.** $\rightarrow$ **Λ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

- $$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{4}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x=1$, ισούται με $f'(1)$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}(\ln x)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}$

  Για $x=1$ έχουμε $f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

Β.2. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Επειδή $\Gamma = \{\omega_3\} \subseteq A'$ είναι $P(\Gamma) = P(\omega_3) \le P(A')$. Όμως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$ οπότε $\frac{1}{3} \le P(A')$.

Επίσης $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = P(A) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 1 - P(A') - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = \frac{3}{4} - P(A')$.

Από τη σχέση $0 \le P(\omega_4) \Leftrightarrow 0 \le \frac{3}{4} - P(A') \Leftrightarrow \ldots.. \Leftrightarrow P(A') \le \frac{3}{4}$

Τελικά $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$.

Β.3.

$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$.

Όμως $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$ και επειδή $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ προκύπτει $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$.

Είναι $P(\Omega) = 1$, άρα $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$ και επειδή $P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = 0$ προκύπτει

$P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Τα $A-B, B-A$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, άρα

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A-B)+P(B-A) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) =$$
$$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \quad (1)$$

Όμως $A=\{\omega_1,\omega_4\}$, άρα $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}$

$B=\{\omega_1,\omega_3\}$, άρα $P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

$A\cap B=\{\omega_1\}$ άρα $P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

Από την (1) βρίσκουμε ότι: $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$.

Έχουμε $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=P(A')-P[(A\cup B)']=1-P(A)-1+P(A\cup B)=$

$P(A\cup B)-P(A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

ή εναλλακτικά

Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$ οπότε $A'-B'=\{\omega_3\}$. Άρα $P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι $[50+3c, 50+4c)$. Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι $\frac{50+3c+50+4c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+\frac{7c}{2}=35 \Leftrightarrow c=10$.

Γ.2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta=75 \Leftrightarrow f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$

Επίσης, $\bar{x}=74 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$. Επίσης ισχύουν $f_1+f_2+f_3+f_4=1$ καθώς και $f_4=2f_3$ άρα,

$$\left.\begin{array}{r} f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5 \\ 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74 \\ f_1+f_2+f_3+f_4=1 \\ f_4=2f_3 \end{array}\right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $f_1=0,1$, $f_2=0,3$, $f_3=0,2$, $f_4=0,4$.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4
Σύνολο	280	1

Γ.3. Έχουμε $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 74\nu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i + x_4 \nu_4 = 74\nu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i = 74\nu - x_4 \nu_4$

Επομένως η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} \overset{(1)}{=} \frac{74\nu - x_4 \nu_4}{\nu - \nu_4} = \frac{74 - x_4 f_4}{1 - f_4} = \frac{74 - 85 \cdot 0,4}{1 - 0,4} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}.$$

Β΄ τρόπος : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i f_i}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$.

Γ.4. Αφού η κατανομή είναι κανονική και το $2,5\%$ των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι $\bar{x} - s = 68$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$, $\bar{x} - s = 68$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $s = 2$ και $\bar{x} = 70$

Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$

Η εφαπτομένη της f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(1) = 1$

Επειδή η (ε) διέρχεται από το $(1, f(1))$ αλλά $f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(1) - 1 = 1\ln 1 + \kappa - 1 = \kappa = 1$ η (ε) γίνεται $y = x + \kappa - 1$

Τα σημεία A, B στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $A(1-\kappa, 0)$ και $B(0, \kappa-1)$ αντίστοιχα

Το τρίγωνο OAB λοιπόν έχει εμβαδό: $E = \frac{1}{2}(OA)(OB)$ άρα $E = \frac{|1-\kappa| \cdot |\kappa - 1|}{2} = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$

Δίνεται $E < 2$, άρα $\frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$

Όμως κ ακέραιος με $\kappa > 1$ άρα $\kappa = 2$

Δ.2.

α) Για $\kappa = 2$ ισχύει $y_i = x_i + 1$ τότε $\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$

β) Ισχύει $x_1 + 3, \ldots, x_{20} + 3, x_{21}, \ldots x_{35}, x_{36} - \lambda, \ldots, x_{50} - \lambda$ άρα

$$31 = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i + 20 \cdot 3 - 15 \cdot \lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + \frac{60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 50 = 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$$

Δ.3. Είναι $f'(x) = 1 + \ln x$. Από $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	0		1/e		+∞
f΄	‖	−	0	+	
f	‖	↘		↗	

Από $\dfrac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow 0 < f\left(\dfrac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$, διότι $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 2 - \dfrac{1}{e} > 0$

Οπότε το εύρος είναι $R = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = 2 + e$.

Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\bar{x} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(\frac{1}{e})}{5} = \frac{a\ln a + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma + e + 8 + 0}{5} = \frac{7 + 8 + e}{5} = \frac{15 + e}{5},$$

διότι $a\ln a + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma = \ln a^{\alpha} + \ln\beta^{\beta} + \ln\gamma^{\gamma} = \ln a^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma} = \ln e^{7} = 7$.

Δ.4. α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε: η γωνία της εφαπτομένης με τον άξονα x΄x είναι οξεία αν και μόνο αν :

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$. Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$ και $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$

Άρα $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$ και $A \cap B = \{t_{11}, ..., t_{29}\}$.

Επομένως $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$.

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας