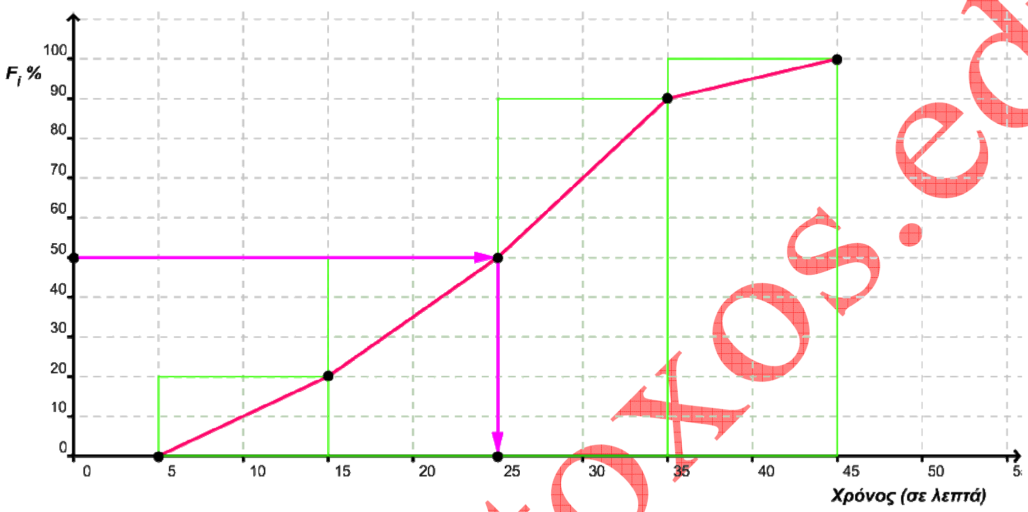
Απαντήσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής 2012

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 31
Α.2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 148
Α.3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 96
Α.4. α. → **Λ** **β.** → **Σ** **γ.** → **Λ** **δ.** → **Σ** **ε.** → **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Στο ιστόγραμμα $F_i\%$ σχεδιάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τοις εκατό και προκύπτει ότι δ=25.



Β.2. Το μέγεθος του δείγματος ν ισούται με $\sum_{i=1}^{4} \nu_i = 7\alpha + 4$

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % έχουμε ότι:

$F_2 = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{N_2}{\nu} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 8$.

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ($F_i\%$) και με χρήση των τύπων:

$f_i\% = 100\frac{\nu_i}{\nu}$, για i=1,…,4

$N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$, για i=1,…,4

$F_i = f_1\% + f_2\% + ... + f_i\%$, για i=1,…,4

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
[5,15)	10	12	20	12	20	120
[15,25)	20	18	30	30	50	360
[25,35)	30	24	40	54	90	720
[35,45)	40	6	10	60	100	240
ΣΥΝΟΛΟ	-----	60	100	-----	-----	1440

Β.3. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}x_i v_i=\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{4}x_i v_i=24$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2\cdot v_i=\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{4}(x_i-24)^2\cdot v_i=84$$

Άρα: $s=\sqrt{84}=9{,}17$ λεπτά.

Β.4. Έστω y το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο στο διάστημα [37,45). Επειδή θεωρούμε πως οι παρατηρήσεις μας είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση έχουμε:

$$\frac{c'}{c}=\frac{f_i'\%}{f_i\%}\Leftrightarrow\frac{45-37}{45-35}=\frac{f_i'\%}{10}\Leftrightarrow f_i'\%=8\%.$$

Επομένως, το 8% των μαθητών χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσει το μαθηματικό πρόβλημα.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα:

Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά με: $P(\Gamma)=\dfrac{3v}{v^2+1}$

Ι: ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά με: $P(I)=\dfrac{v+2}{v^2+1}$

Επίσης: $P(\Gamma\cap I)=\dfrac{v+1}{v^2+1}$.

Γ.1. Είναι:

$$P(\Gamma\cap I)=\lim_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=2\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}=2\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$2\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3-4}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=2\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=2\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$2\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=2\cdot\frac{-1-1}{-1(\sqrt{(-1)^2+3}+2)}=2\cdot\frac{-2}{(-1)\cdot(2+2)}=2\cdot\frac{-2}{-4}=1.$$

Άρα $P(\Gamma\cup I)=1$ και επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα είναι $\Gamma\cup I=\Omega$, δηλαδή το $\Gamma\cup I$ είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ.2. Σύμφωνα με τον προσθετικό Νόμο των Πιθανοτήτων είναι:

$$P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)\Leftrightarrow 1=\frac{3v}{v^2+1}+\frac{v+2}{v^2+1}-\frac{v+1}{v^2+1}$$

$$\Leftrightarrow v^2+1=3v+v+2-v-1\Leftrightarrow v^2-3v=0\Leftrightarrow v(v-3)=0\overset{v\geq 3}{\Leftrightarrow}v=3$$

Γ.3. Ισχύει: για ν=3 είναι: $P(\Gamma)=\frac{9}{10}, P(I)=\frac{5}{10}, P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10}$.

$$P((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma))=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap I)+P(I)-P(\Gamma\cap I)$$

$$=P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I)=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-\frac{8}{10}=\frac{6}{10}.$$

Γ.4. Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε ότι:

$$P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}=\frac{32}{N(\Omega)}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι: $P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10}$, επομένως θα είναι:

$$\frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ell n^2 x}{x}$, $x>0$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\frac{\left(1+\ell n^2x\right)'\cdot x-\left(1+\ell n^2x\right)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{2\ell nx\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\left(1+\ell n^2x\right)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\ell n^2x-2\ell nx+1}{x^2}=$$

$$=-\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)^2\le 0 \text{ για κάθε } x>0.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)^2=0\Leftrightarrow \ell nx-1=0\Leftrightarrow \ell nx=1\Leftrightarrow x=e$$

Άρα, ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$ 0	0 e	e $+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $-$
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ.2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(\text{βάση})\cdot(\text{ύψος})=(OK)\cdot(O\Lambda)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ell n^2x}{x}=1+\ell n^2x,\ x>0\ \&\ f(x)>0,$$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με :

$$E'(x)=\left(1+\ell n^2x\right)'=2\ell nx\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ell nx}{x},\ x>0$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ell nx}{x}=0\Leftrightarrow \ell nx=0\Leftrightarrow \ell nx=\ell n1\Leftrightarrow x=1$$

$$E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2\ell nx}{x}>0\Leftrightarrow \ell nx>0\Leftrightarrow \ell nx>\ell n1\Leftrightarrow x>1$$

$E'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ell nx}{x}<0 \Leftrightarrow \ell nx<0 \Leftrightarrow \ell nx<\ell n1 \Leftrightarrow x<1$

Άρα, ο πίνακας μονοτονίας της E είναι:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		‖	$-$	0	$+$	
$E(x)$		‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως, η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Ακόμα η συνάρτηση E παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=1$, το ελάχιστο $E(1)=1$ τετραγωνική μονάδα.

Άρα, το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν:

$\beta\acute{\alpha}\sigma\eta=(OK)=x=1$ και $K(1,0)$, ενώ

$\acute{\upsilon}\psi o\varsigma=(O\Lambda)=f(1)=\dfrac{1+\ell n^2 1}{1}=1$ και $\Lambda(1,0)$

Τότε όμως το ορθογώνιο $OKM\Lambda$ είναι τετράγωνο.

Δ.3. Έστω $(\eta): y=\lambda_\eta\cdot x+\beta_\eta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $\Sigma(1,f(1))$.

Έχουμε:

$f(x)=\dfrac{1+\ell n^2 x}{x}$ άρα $f(1)=\dfrac{1+\ell n^2 1}{1}=1$ και $f'(x)=-\left(\dfrac{\ell nx-1}{x}\right)^2$, άρα $f'(1)=-\left(\dfrac{\ell n1-1}{x}\right)^2=-1$

Είναι $\lambda_\eta=f'(1)=-1$, άρα $(\eta): y=-1\cdot x+\beta_\eta$

Έχουμε $\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$.

Άρα $(\varepsilon): y=-x+\beta$

Τα σημεία $M_i(x_i,y_i)\in\varepsilon: y=-x+\beta$, άρα: $y_i=-x_i+\beta$, $i=1,2,...,10$

Σύμφωνα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου, οι τεταγμένες y_i των σημείων M_i θα έχουν:

Μέση τιμή: $\bar{y}=-1\cdot\bar{x}+\beta=-1\cdot 10+\beta=-10+\beta$

Τυπική απόκλιση: $s_y=|-1|\cdot s_x=1\cdot 2=2$

Συντελεστή μεταβλητότητας: $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{2}{|-10+\beta|}$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i ομοιογενές, θα πρέπει:

$CV_y\le 10\% \Leftrightarrow \dfrac{2}{|-10+\beta|}\le\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |-10+\beta|\ge 20 \Leftrightarrow -10+\beta\ge 20$ ή $-10+\beta\le -20 \Leftrightarrow \beta\ge 30$ ή $\beta\le -10$

Δ.4. Επειδή $A\neq\varnothing$ και $A\cap B\neq\varnothing$ και ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα είναι $0<P(A)\le 1$ και $0<P(A\cap B)\le 1$.

Έχουμε: $A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A)\le P(A\cup B) \overset{f\searrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f(P(A))\ge f(P(A\cup B))$ (1)

$A\cap B\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A\cup B) \overset{f\searrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f(P(A\cap B))\ge f(P(A\cup B))$ (2)

Προσθέτοντας τις ανισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$f(P(A))+f(P(A\cap B))\ge 2f(P(A\cup B))$.

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας