Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2011

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 260 (Θεώρημα Fermat).
Α.2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 280.
Α.3 α. $\rightarrow$ **Σ** **β.** $\rightarrow$ **Σ** **γ.** $\rightarrow$ **Λ** **δ.** $\rightarrow$ **Λ** **ε.** $\rightarrow$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Παρατηρούμε ότι $\left|z-3i\right| = \left|\overline{z-3i}\right| = \left|\overline{z}+3i\right|$

Άρα. $\left|z-3i\right| + \left|\overline{z}+3i\right| = 2 \Leftrightarrow 2\left|z-3i\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z-3i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z-\left(0+3i\right)\right| = 1$

Επομένως, οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(0,3\right)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Β.2. Είναι:

$$\left|z-3i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z-3i\right|^2 = 1 \Leftrightarrow \left(z-3i\right)\overline{\left(z-3i\right)} = 1 \Leftrightarrow \left(z-3i\right)\left(\overline{z}+3i\right) = 1 \overset{z\neq 3i}{\Leftrightarrow} \overline{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

Β.3. Έστω $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\overline{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i}$, έχουμε: $w = z-3i+\dfrac{1}{z-3i} = z-3i+\overline{z}+3i = z+\overline{z} = 2\operatorname{Re}\left(z\right) = 2x \in \mathbb{R}$

Επίσης $w = z-3i+\dfrac{1}{z-3i}$ και $|\mathrm{w}| = \left|\mathrm{z}-3\mathrm{i}+\dfrac{1}{\mathrm{z}-3\mathrm{i}}\right| \le |\mathrm{z}-3\mathrm{i}| + \left|\dfrac{1}{\mathrm{z}-3\mathrm{i}}\right| = 1+1 = 2$.

Και αφού $|\mathrm{w}| \le 2 \overset{\mathrm{w}\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} -2 \le \mathrm{w} \le 2$.

Β.4.

$\left|z-w\right| = |x+yi-2x| = |-x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$[e^x f'(x)-e^x]'=[xf'(x)]'$

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$[e^x f'(x)-e^x]=[xf'(x)]+c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $c=-1$

Άρα $[e^x f'(x)-e^x]=[xf'(x)]-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Πρέπει ν.δ.ο. $e^x-x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Έστω $t(x)=e^x-x$, στο $\mathbb{R}$, με $t'(x)=e^x-1$, στο $\mathbb{R}$

x	-∞	0	+∞
t'	-	0	+
t	↘	1	↗

και $t(x)\geq t(0)=1$.

Άρα διαιρώντας με e^x-x η σχέση (1) δίνει: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\left(\ell n\left(e^x-x\right)\right)'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα υπάρχει σταθερά $c'\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$f(x)=\ell n\left(e^x-x\right)+c'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $f(0)=\ell n\left(e^0-0\right)+c' \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c'=0$

Άρα $f(x)=\ell n\left(e^x-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ.2. Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$.

x	-∞	0	+∞
f'	-	0	+
f	↘	0	↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=\ell n\left(e^0-0\right)=0$

Γ.3.

$f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=...=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0\ (2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^x-xe^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η εξίσωση (2) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x)=0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x-xe^x=e^x(1-x)$.

χ	-∞	x1	0	x2	+∞
h΄		+	0	-	
h		↗		↘	
	-1		e-1		-∞

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\underset{\text{de l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=2\cdot0-0-1=-1$

$h(1)=2e^1-1\cdot e^1-1=e-1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^x\left(2\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(2\cdot0-1-0)}{=}-\infty$

- Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1]$. Το σύνολο τιμών της είναι: $h(\Delta_1)=(-1,e-1]$

Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ και h γνησίως αύξουσα στο Δ_1 η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1\in\Delta_1$

- Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$.Το σύνολο τιμών της είναι: $h(\Delta_2)=(-\infty,e-1)$

Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ και h γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2\in\Delta_2$

Επομένως, τόσο η εξίσωση $h(x)=0$, όσο και η ισοδύναμή της $f''(x)=0$ έχουν ακριβώς δυο ρίζες $x_1\in\Delta_1$ και $x_2\in\Delta_2$.

	-∞	x1		x2	+∞
f΄΄	−	0	+	0	−
f	⌒		⌣		⌒
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Διότι
$$\begin{aligned}&x>x_2\Leftrightarrow h(x)<h(x_2)\Leftrightarrow h(x)<0\\&x<x_1\Leftrightarrow h(x)<h(x_1)\Leftrightarrow h(x)<0\\&\left.\begin{aligned}1<x<x_2\\x_1<x<1\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(x)>0\end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1,x_2 (δηλαδή έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά), θα έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής, τα $M_1\left(x_1,f(x_1)\right)$ και $M_2\left(x_2,f(x_2)\right)$.

Γ.4. Η εξίσωση γίνεται $\ell n\left(e^{x}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $\varphi(0)=f(0)-\sigma\upsilon\nu 0=0-1=-1<0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή $\frac{\pi}{2}>0 \overset{f\uparrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ Άρα και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$
- Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Άρα, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi'(x)=f'(x)+\eta\mu x \Leftrightarrow \varphi'(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}+\eta\mu x$

Επειδή για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\eta\mu x>0$ και για $x>0\Leftrightarrow e^{x}>1\Leftrightarrow e^{x}-1>0 \overset{e^{x}-x>0}{\Leftrightarrow} \frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}>0$.

Έχουμε ότι $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\varphi\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η εξίσωση $\varphi(x)=0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$, αυτή θα είναι και η **μοναδική ρίζα.**

ΘΕΜΑ Δ

Για το ολοκλήρωμα-συνάρτηση $I(x)=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ θέτουμε $x+t=u\Leftrightarrow t=u-x$

Τότε, $dt=dx$ και

- Για $t=0$, $u=x$
- Για $t=-x$, $u=0$

Επομένως: $I(x)=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=\int_x^{0}\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^{0}\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=\int_x^{0}\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=-e^{-2x}\cdot\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{g(u)}du$

Άρα, $I(x)=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{g(u)}du$. Ομοίως (με την ίδια αντικατάσταση), προκύπτει: $J(x)=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{f(u)}du$.

Δ.1. Έχουμε: $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\dfrac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή οι συναρτήσεις $g(u)$ και e^{2u} είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως η $f(x)=1+\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ομοίως, προκύπτουν: $g(x)=1+\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{f(u)}du$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)\cdot g'(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)g(x)=f(x)g'(x) \underset{g(x)>0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}} \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ell nf(x))'=(\ell ng(x))'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\ell nf(x)=\ell ng(x)+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $\ell nf(0)=\ell ng(0)+c \Leftrightarrow \ell n1=\ell n1+c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα, $\ell nf(x)=\ell ng(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ.2.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \overset{f(x)g(x)=e^{2x}}{=} \frac{e^{2x}}{\frac{e^{2x}}{f(x)}}=f(x) \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x f(x)=0 \overset{\delta\iota\alpha\, e^{2x}}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)=ce^x \Leftrightarrow f(x)=e^x$$

Δ.3. $L=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ell nf(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ell ne^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=-\infty$

Δ.4. Η $f(t^2)=e^{t^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x^2)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt<0$, αφού $f(t^2)=e^{t^2}>0$ και $x<1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1|F(x)|dx \overset{F(x)<0}{=} -\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-1\cdot F(1)+0\cdot F(0)+\int_0^1 xe^{x^2}dx \overset{F(1)=0}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=\frac{e-1}{2}$$ τετραγωνικές μονάδες.

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας