

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (14Α)**

Εισηγητής : Αθανασιάδης Κων/νος

Διάρκεια: 3 ώρες
Οκτώβριος 2007

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Μονάδες 7)

B. Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(Μονάδες 8)

Γ. Να αντιστοιχίσετε τον κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του στη δεύτερη στήλη.

1η Στήλη

2η Στήλη

1) $ z - 2 - 3i = 1$	A) $x^2 + y^2 = 4^2$
2) $ \bar{z} + 2i = z + 2i $	B) $y = -x$
3) $ z = 4$	Γ) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$
4) $ z - 1 - i = z + 1 + i $	Δ) $x = 0$
5) $ -z + 1 = z - i $	E) $y = 0$
	Z) $y = x$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $a+bi$:

$$z_1 = \frac{i}{1+i}, \quad z_2 = (3-2i)^2, \quad z_3 = \frac{7-7i^{20}}{1-i}, \quad z_4 = (i^{36} - i^{41})^4$$

(Μονάδες 12)

B. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε : $x + yi = i^{3v} + 1$, $v \in \mathbb{N}$ όπου $v = 4\kappa + 3$ ($\kappa \in \mathbb{N}$)

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται ο μιγαδικός $z(v) = 2 + xi^v$, $v \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε τις εικόνες των μιγαδικών $z(1), z(2), z(15), z(104)$

β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εικόνες σχηματίζουν τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

B. Αν $z = 1 + i$ να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = \bar{z}$, $z_2 = \frac{1}{z}$, $z_3 = -\bar{z}$ είναι συνευθειακά σημεία.

(Μονάδες 7)

Γ. Να δείξετε ότι: $\left(\frac{\alpha + \beta i}{\beta - \alpha i}\right)^{2v} - \left(\frac{2 - 5i}{5 + 2i}\right)^{2v} = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Αν $w = \frac{z + 2i}{iz + 2}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm 2i$ και η εικόνα του z κινείται στον άξονα $x'x$ να αποδείξετε ότι:

α) η εικόνα του w κινείται σε κύκλο.

β) Βρείτε $|w - 2 - 2i|_{\max}$ και $|w - 2 - 2i|_{\min}$.

(Μονάδες 12)

B. Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $z^2 - \sqrt{2}wz + w^2 = 0$ και A, B οι εικόνες των z^2, w^2 , τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 13)

Καλή Επιτυχία