Η ΠΑΡΤΙΔΑ ΔΕ ΣΩΘΗΚΕ!

Στην ΑΣΚΗΣΗ 5 του άρθρου μου «Ακρότατα και Φράγματα στα Μέτρα Μιγαδικών» (Περιοδικό «Το φ», τεύχος 4, σελίδα 102 και Περιοδικό «Απολλώνιος», τεύχος 5, σελίδα 88), γράφω στο σχόλιο: «Τελικά η παρτίδα σώθηκε! Με την έννοια ότι όντως είχαμε μέγιστη τιμή (και όχι φράγμα) το 2». Ωστόσο, οι τιμές των $z_{1,2}$ που υποτίθεται πως θα έσωζαν την παρτίδα δεν έχουν μέτρο 1, οπότε προφανώς απορρίπτονται.

Το ερώτημα, λοιπόν, παραμένει: **υπάρχει μέγιστη τιμή για το μέτρο της διαφοράς z-w;** Και για ποια τιμή του z προκύπτει;

Η (καταραμένη…) αλγεβρική μορφή θα ξεδιαλύνει τα πράγματα: Θέτοντας z=x+yi, βρίσκουμε ότι $w=\dfrac{3x}{5-4y}+\dfrac{5y-4}{5-4y}i$. Έτσι:

$$|z-w|^2=\left(\frac{3x}{5-4y}-x\right)^2+\left(\frac{5y-4}{5-4y}-y\right)^2=...=4\frac{y^2-1}{4y-5}$$, αφού $x^2=1-y^2$.

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(y)=\dfrac{y^2-1}{4y-5}$, **όπου** $y\in[-1,1]$, βρίσκουμε ότι

$f'(y)=2\dfrac{2y^2-5y+2}{(4y-5)^2}$, οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\mathbf{y_o=1/2}$. Αφού $x^2=1-y^2$, θα είναι $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, επομένως $z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Για $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, βρίσκουμε $w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\bar{z}$ οπότε $|z-w|_{\max}=...=1$. Τελικά, υπάρχει μέγιστη τιμή για το μέτρο, αλλά δε συμπίπτει με την «προφανή», ούτε προκύπτει για αντίθετους μιγαδικούς.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Η αλγεβρική μορφή, την οποία συνήθως προσπαθούμε να αποφύγουμε, είτε χάριν συντομίας είτε για να προκρίνουμε εποπτικές λύσεις αποδείχτηκε πολύτιμη αρωγός στον εντοπισμό του ακροτάτου. Ανάλογα εργαστήκαμε στο 1^o θέμα της σελίδας 95 («Απολλώνιος», τεύχος 5).
2. Ο πλημμελής έλεγχος που έκανα στην παραπάνω άσκηση, τονίζει περισσότερο το στόχο του άρθρου: πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στη διάκριση **ακροτάτου** και **φράγματος**! Πάντα, ο ασφαλής τρόπος εντοπισμού του ακροτάτου είναι η εύρεση της τιμής των μεταβλητών για τις οποίες λαμβάνεται, ή έστω, η εξασφάλιση ότι υπάρχουν τέτοιες μέσω ενός θεωρήματος ύπαρξης.
3. Ευχαριστώ τον προσεκτικό συνάδελφο Κώστα Αθανασιάδη από τα Γιαννιτσά, ο οποίος μου επεσήμανε το λάθος.
4. Το Β ερώτημα της άσκησης, μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής:
   «Αποδείξτε ότι $|z-w|\le 1$». Και το Γ:

   «Αποδείξτε ότι η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το 1». Μία πιθανή αντιμετώπιση:

Β: Είναι $|z-w| = \left|z - \dfrac{2z-i}{iz+2}\right| = ... = \left|\dfrac{z^2+i}{z-2i}\right|$. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$\left|z^2+1\right| \le |z-2i| \Leftrightarrow \left|z^2+1\right|^2 \le |z-2i|^2 \Leftrightarrow (z^2+1)(\overline{z}^2+1) \le (z-2i)(\overline{z}+2i)$ ή:

$2\,\mathrm{Re}(z^2) \le 3+2i\,\mathrm{Im}(z)i \Leftrightarrow 2(x^2-y^2) \le 3-4y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (2y-1)^2 \ge 0$, που ισχύει.

Γ: Η ισότητα επιτυγχάνεται για **y=1/2,** σύμφωνα με το Β. Η εύρεση των μιγαδικών z και w είναι πια απλή υπόθεση.