Ακρότατα και φράγματα στα μέτρα μιγαδικών

ΣΧΟΛΙΟ ΣΕ:

Πάμπολλες είναι οι ασκήσεις όπου ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο του μέτρου κάποιου μιγαδικού. Με το άρθρο του συναδέλφου μας Λεωνίδα Θαρραλίδη που ακολουθεί, αποσαφηνίζονται με τον καλύτερο τρόπο τα διάφορα σχετικά ερωτήματα. Όπως προκύπτει από το άρθρο, συνηθισμένες είναι οι ελλιπείς ή και λάθος λύσεις στα θέματα αυτού του είδους.

1. Εισαγωγή

Στο 3^o θέμα των μαθηματικών θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης του 2006, δίνονταν τρεις μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$ και, μεταξύ άλλων, ζητούνταν να αποδειχθούν οι ανισότητες: $|z_1-z_2|^2\le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\ge -1$.

Ωστόσο, με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούσε να αποδειχθεί ότι $|z_1-z_2|^2=3$ ενώ $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\frac{1}{2}$ (Δες σχετικά και στο τέλος του άρθρου).

Αυτό, φυσικά, δεν αναδεικνύει λανθασμένο το θέμα, αλλά εγείρει το ερώτημα κατά πόσο είναι νόμιμο από τη μεριά της «μαθηματικής ηθικής» να ζητούμε από μαθητές να αποδείξουν την **ύπαρξη φράγματος σε μία σταθερή ποσότητα**: τον αριθμό 4 ως **άνω φράγμα** του $|z_1-z_2|^2$ και τον αριθμό -1 ως **κάτω φράγμα** του $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

Όταν είδα το θέμα, θυμήθηκα μία άσκηση (από τις «Γενικές» μάλιστα) του χαριτωμένου και αλησμόνητου βιβλίου μαθηματικών τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ Λυκείου (Α΄ Έκδοση 1999). Στην άσκηση 5 της σελίδας 125 δίνονταν οι μιγαδικοί $z_1=3-i$ και $z_2=1+2i$ και ζητούνταν η **μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης** $|z_1+z_2|$, δηλαδή η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός: $|(3-i)+(1+2i)|=|4+i|=\sqrt{17}$!!!

Πόσο μεγάλο μπορεί άραγε να γίνει το $\sqrt{17}$; (Παρεπιμπτόντως, στο βιβλίο αυτό, σε μερικές ασκήσεις -σε μερικές άλλες, πάλι, όχι!- όταν λέγαμε «μιγαδικός» εννοούσαμε «μη πραγματικός μιγαδικός»).

2. Φράγμα - Ακρότατο

- Έστω Α μία παράσταση που περιέχει μεταβλητές (τουλάχιστον μία) και η αριθμητική της τιμή μεταβάλλεται. **Άνω φράγμα** της Α λέγεται κάθε αριθμός α για τον οποίο ισχύει $A \leq \alpha$, για οποιαδήποτε τιμή των μεταβλητών της παράστασης A. Είναι φανερό ότι, τότε, και κάθε αριθμός β με $\beta > \alpha$, είναι επίσης ένα άνω φράγμα της A.

  Για παράδειγμα, αν $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, τότε το 7 είναι ένα άνω φράγμα της A, αφού: $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \leq 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$. Αλλά φυσικά ισχύουν και $A \leq 10, A \leq 500$ κλπ.

  Ανάλογα: **κάτω φράγμα** της A, είναι κάθε αριθμός κ, με $A \geq \kappa$. Αλλά και οποιοσδήποτε αριθμός λ με $\lambda \leq \kappa$, είναι επίσης κάτω φράγμα της A.

- **Ακρότατα** της Α είναι το μέγιστο και το ελάχιστο της A:

  Μέγιστη Τιμή της Α είναι ο αριθμός Μ, όταν είναι ο μεγαλύτερος από τις δυνατές τιμές που παίρνει η παράσταση Α.

  Ελάχιστη Τιμή της Α είναι ο αριθμός m, που είναι η ελάχιστη από τις τιμές που μπορεί να λάβει η παράσταση.

- Έτσι, για την $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, η οποία μετασχηματίζεται (Άλγεβρα Β Λυκείου, σελίδα 46) στη μορφή $A = 5\eta\mu(x + \varphi)$, όπου $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}, \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$, η μέγιστη τιμή είναι $M = 5$ ενώ η ελάχιστη $m = -5$.

  Μπορούμε να δώσουμε και μία διαφορετική απόδειξη, μέσω διανυσμάτων: Αν θέσουμε $\vec{\alpha} = (3,4)$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ τότε είναι $|\vec{\alpha}| = 5, |\vec{\beta}| = 1$ και $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. Όμως ισχύει $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ δηλαδή $-5 \leq A \leq 5$, με τις ακραίες τιμές να είναι πραγματοποιήσιμες όταν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

- Δεν υποχρεούται κάθε παράσταση να εμφανίζει φράγματα ή ακρότατα. Για παράδειγμα η $A = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ δεν έχει ούτε φράγματα ούτε ακρότατα. Η $B = x + \frac{1}{x}, x > 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa \leq 2$ αλλά δεν έχει ακρότατο. Τέλος, η παράσταση $\Gamma = x + \frac{1}{x}, x \geq 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa \leq 2$ και ελάχιστη τιμή το 2. (Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$). Πάντως, <u>όταν μία παράσταση έχει ελάχιστη τιμή, αυτή είναι το μέγιστο κάτω φράγμα της</u>.

- Οι διαφορές μεταξύ άνω φράγματος και μέγιστης τιμής (όταν υπάρχουν) είναι:

  1. Η μέγιστη τιμή είναι μοναδική ενώ τα άνω φράγματα άπειρα σε πλήθος. Δεν θα ήταν παράλογο να ζητηθεί στο 3^o θέμα του 2006 ότι π.χ. $|z_1 - z_2|^2 \leq 2006$!!

  2. Η μέγιστη τιμή είναι αριθμός που <u>λαμβάνει</u> η παράσταση για <u>προσδιορίσιμες</u> τιμές των μεταβλητών που περιέχει.

- Ανάλογης ποιότητας διαφορές μπορούμε να εντοπίσουμε και μεταξύ των ακόλουθων μαθηματικών εννοιών:

  1. Μεταξύ <u>συνόλου αφίξεως</u> B συνάρτησης $f: A \to B$ και <u>συνόλου τιμών</u> $f(A)$: Το B είναι υπερσύνολο του $f(A)$, περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ των στοιχείων x του A, αλλά ενδεχομένως και αριθμούς που δεν είναι τιμές της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $f: \mathbb{R} \to [-1,10]$ με $f(x) = \eta\mu x$ τότε $B = [-1,10]$ ενώ προφανώς $f(A) = [-1,1]$.

  2. Μεταξύ της <u>περιβάλλουσας γραμμής</u> και του <u>γεωμετρικού τόπου</u> μεταβλητού σημείου M. Η περιβάλλουσα είναι «η γραμμή στην οποία κινείται το M», άσχετα με το αν τελικά το M δεν μπορεί να βρεθεί σε όλες τις θέσεις της. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε μεταβλητό σημείο M(ημθ,συνθ) με $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε $x_M^2 + y_M^2 = 1$, άρα το M <u>κινείται</u> στο μοναδιαίο κύκλο (0,1).

Αφού όμως $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, συμπεραίνουμε ότι $x_M, y_M \geq 0$. Έτσι ο <u>γεωμετρικός τόπος</u> του Μ είναι το τεταρτοκύκλιο του παραπάνω κύκλου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

- Ο προσδιορισμός Ακροτάτων Παράστασης, Συνόλου Τιμών, Γεωμετρικού Τόπου είναι σαφώς δυσχερέστερος από τον υπολογισμό φραγμάτων ή συνόλου αφίξεως ή περιβάλλουσας, εφόσον απαιτεί έλεγχο των αποτελεσμάτων ως προς τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους.

3. Ασκήσεις με Ακρότατα Μέτρου Μιγαδικών

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές ασκήσεις, στις οποίες ο βιαστικός εντοπισμός «ακροτάτων» αποδεικνύεται παραπλανητικός. Σε κάθε περίπτωση ακολουθεί η αποκατάσταση της αλήθειας.

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = z + 3 + 4i$ και $\left|z + \frac{17}{2}\right| = \left|z - \frac{1}{2} - 12i\right|$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας $K(z)$.

Β. Να βρείτε το ελάχιστο δυνατό μέτρο του w.

Λύση

Α. Το $K(z)$ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ όπου $A(-17/2, 0)$ και $B(1/2, 12)$, η οποία είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Αν θέσουμε $z = x + yi$, βρίσκουμε την εξίσωση η οποία είναι της μεσοκαθέτου (ε) του ΑΒ. $3x + 4y = 12$

Β. Με $z = x + yi$, είναι $w = (x+3) + (y+4)i$.

Έτσι: $|w| = \sqrt{(x+3)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25}$

και αφού $6x + 8y = 2(3x + 4y) = 24$: $|w| = \sqrt{x^2 + y^2 + 49} \geq \sqrt{49} = 7$

δηλαδή $|w| \geq 7$.

Έτσι $|w|_{min} = 7$.

ΣΧΟΛΙΟ: Σύμφωνα με τον τρόπο λύσης στο (Β), το ελάχιστο μέτρο του w επιτυγχάνεται όταν $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

Όμως η εικόνα του αριθμού 0 δεν βρίσκεται στην $3x+4y=12$!!

Διαφορετικά: Ο μιγαδικός $z=0+0i$ δεν έχει την ιδιότητα $\left|z+\frac{17}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$.

Κατά συνέπεια, το 7 δεν είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου του w, αλλά ένα κάτω φράγμα.

Το λάθος διορθώνεται ως εξής: Είναι $|w|=(KA)$, όπου $K(z)$, $A(-3,-4)$.

Έτσι, έχουμε: $|z|_{min}=d(A,\varepsilon)=\frac{|3(-3)+4(-4)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{37}{5}>7$.

Με το γεωμετρικό αυτό τρόπο, είναι δυνατό να προσδιορισθεί και ο μιγαδικός w με το ελάχιστο δυνατό μέτρο.

Άσκηση 2

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $z^2-6\sigma\upsilon\nu\theta\cdot z+5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4=0$, όπου $\theta\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης, για τις διάφορες τιμές του θ.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$ για τις ρίζες αυτές.

Λύση

Α. Είναι $\Delta=(-6\sigma\upsilon\nu\theta)^2-4(5\sigma\upsilon\nu\theta+4)=16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=-(4\eta\mu\theta)^2$

άρα $z_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm2\eta\mu\theta\cdot i$.

Β. Αν $M_{1,2}$ οι εικόνες των $z_{1,2}$ τότε $x_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta$ ενώ $y_{1,2}=\pm2\eta\mu\theta$.

Έτσι: $\frac{x_{1,2}}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta, \frac{y_{1,2}}{2}=\pm\eta\mu\theta$ οπότε τα σημεία $M_{1,2}$ βρίσκονται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Γ. Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$ και η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν το τμήμα M_1M_2 γίνει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης.

Είναι $\alpha^2=9$ άρα $\alpha=3$ και $2\alpha=6$.

Έτσι: $|z_1-z_2|_{max}=6$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς επομένως οι εικόνες τους είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Έτσι, η χορδή M_1M_2 της έλλειψης είναι κάθετη στον $x'x$ άρα η μέγιστη τιμή της είναι ο μικρός άξονάς της, δηλαδή: $|z_1 - z_2|_{max} = 2\beta = 2 \cdot 2 = 4$.

- Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε και ως εξής:
- Είναι $|z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z_1}| = |2\mathrm{Im}(z_1) \cdot i| = 2 \cdot 2 \cdot |\eta\mu\theta| = 4 \cdot |\eta\mu\theta|$

άρα $|z_1 - z_2|_{max} = 4$, όταν $|\eta\mu\theta| = 1$ κλπ.

- Με το δεύτερο αυτόν τρόπο, μπορεί να απαντηθεί και η επόμενη παραλλαγή της άσκησης: Να δοθεί ότι $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ αντί για $\theta \in \mathbb{R}$.

Σ΄ αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του $|\eta\mu\theta|$ με $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, δηλαδή στο $\left|\eta\mu\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Θα βρίσκαμε $|z_1 - z_2|_{max} = 2\sqrt{2}$.

- Αν θέλει κανείς να περιπλέξει ακόμη περισσότερο την κατάσταση, μπορεί να δώσει διαφορετικό διάστημα για το θ, π.χ. το $[7\pi/6, 4\pi/3]$.

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + (5 - 4\eta\mu\theta) = 0$, όπου $\theta \in [0,\pi]$.

Α. Να βρείτε τις ρίζες της $z_{1,2}$ και τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες τους.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

Λύση

Α. Είναι $\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 20 + 16\eta\mu\theta = 4(1 - \eta\mu^2\theta) - 20 + 16\eta\mu\theta =$

$= -4(\eta\mu^2\theta - 4\eta\mu\theta + 4) = -[2(\eta\mu\theta - 2)]^2$

άρα $z_{1,2} = \sigma\upsilon\nu\theta \pm (\eta\mu\theta - 2)i$. Αν $M_1(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta - 2)$ η εικόνα του $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta + (\eta\mu\theta - 2)i$, τότε ισχύει ${x_M}^2 + (y_M + 2)^2 = 1$,

οπότε το M_1 κινείται στον κύκλο με κέντρο το $K(0,-2)$ και ακτίνα 1.

Όμοια, η εικόνα $M_2(συνθ, 2 - ημθ)$ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο $Λ(0,2)$ και ακτίνα 1.

Β. Είναι $|z_1 - z_2| = (M_1M_2)$. Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μέγιστου μήκους τμήμα M_1M_2 προκύπτει όταν το M_1 βρεθεί στη θέση $(0,-3)$ ενώ το M_2 στη θέση $(0,3)$.

Έτσι: $|z_1 - z_2|_{max} = 6$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Είναι $|z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z_1}| = 2|Im(z_1)| = 2 \cdot |ημθ - 2| = 4 - 2ημθ$.

Στο $[0, π]$, η ελάχιστη τιμή του $ημθ$ είναι η $ημ0 = ημπ = 0$

άρα $|z_1 - z_2|_{max} = 4$.

Προκύπτει όταν $M_1(1,-2)$ και $M_2(1,2)$ (για $θ = 0$) ή $M_1(-1,-2)$ και $M_2(-1,2)$ (για $θ = π$)

- Αν στο ερώτημα (Α) είχε ζητηθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων, τότε τα πράγματα θα ήταν ευκολότερα στο (Β), αλλά δυσκολότερα στο (Α): ουδέν καλόν αμιγές κακού!

Αφού $θ \in [0, π]$, θα έχουμε $συνθ \in [-1,1]$ ενώ $ημθ \in [0,1]$

άρα $(ημθ - 2) \in [-2,-1]$ δηλαδή $-2 \le ημθ - 2 \le -1$

και $1 \le 2 - ημθ \le 2$.

Έτσι, για το $M_1(x,y)$ ισχύουν: $-1 \le x \le 1, -2 \le y \le -1$ και για το M_2: $-1 \le x \le 1, 1 \le y \le 2$.

Τελικά, ο γεωμετρικός τόπος του M_1 είναι το πάνω ημικύκλιο του πρώτου κύκλου ενώ του M_2 το κάτω ημικύκλιο του δεύτερου κύκλου.

Άσκηση 4

Έστω $z = x + yi$ με x, y πραγματικούς και $x^2 + \frac{y^2}{ημ^2θ} = 1$, όπου $θ \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

Α. Αποδείξτε ότι: $|z|^2 + |z^2 - συν^2θ| = 1 + ημ^2θ$.

Β. Αν η εικόνα του z^2 βρίσκεται σε έλλειψη με εστίες την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1/2,0)$:

1. Να βρείτε την τιμή του $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Υπολογίστε το μιγαδικό z με $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου του z ;

Λύση

Α. Η εικόνα $M(z)$ βρίσκεται στην έλλειψη με $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = \eta\mu^2\theta$

άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta$.

Έτσι $\gamma = \sigma\upsilon\nu\theta > 0$ αφού $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και οι εστίες είναι $E'(-\sigma\upsilon\nu\theta,0)$, $E(\sigma\upsilon\nu\theta,0)$.

Θα ισχύει, λοιπόν: $(ME') + (ME) = 2\alpha \Leftrightarrow |z+\sigma\upsilon\nu\theta| + |z-\sigma\upsilon\nu\theta| = 2$,

οπότε $(|z+\sigma\upsilon\nu\theta| + |z-\sigma\upsilon\nu\theta|)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+\sigma\upsilon\nu\theta|^2 + 2|z+\sigma\upsilon\nu\theta||z-\sigma\upsilon\nu\theta| + |z-\sigma\upsilon\nu\theta|^2 = 4$

και μετά τις πράξεις: $2|z|^2 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2|z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 4$

από όπου τελικά έχουμε το ζητούμενο.

Β. 1. Αφού $|z^2 - 0| + |z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 1 + \eta\mu^2\theta$, η εικόνα του z^2 κινείται, για κάθε τιμή του θ, σε έλλειψη με εστίες $O(0,0)$ και $(\sigma\upsilon\nu^2\theta,0)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1/2$

άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και τελικά $\theta = \pi/4$.

2. Αφού $\eta\mu^2\theta = 1/2$, θα είναι: $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$.

Ακόμη: $|z|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.

Από το σύστημα, βρίσκουμε: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y \pm \frac{1}{2}$

οπότε $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

3. Αντικαθιστώντας στη σχέση του (Α): $|z|^2+\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$

άρα: $|z|^2=\frac{3}{2}-\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{3}{2}$. Έτσι: $|z|^2_{max}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow|z|_{max}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Είναι $x^2+2y^2=1$

  και $|z|^2=x^2+y^2=x^2+2y^2-y^2=1-y^2\leq1$

  άρα $|z|^2_{max}=1\Leftrightarrow|z|_{max}=1$

  Αυτό συμβαίνει όταν $y=0$.

  Τότε $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$,
  δηλαδή όταν $z=\pm1+0i\Leftrightarrow z=\pm1$.

- Η λανθασμένη τιμή $|z|_{max}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, είναι απλώς ένα άνω φράγμα για το μέτρο του z.
  Το λάθος στον υπολογισμό ήταν ότι θεωρήθηκε εφικτό να έχουμε $\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=0\Leftrightarrow z^2=\frac{1}{2}$, που φυσικά αντιφάσκει με το $|z|^2=\frac{3}{2}$!

4. Η Αφορμή

- Από τα παραπάνω θα έγινε αντιληπτό ότι, για να βεβαιωθούμε αν ένας αριθμός είναι ακρότατο κι όχι κάποιο φράγμα για την μεταβλητή παράσταση που μας απασχολεί, ο ασφαλής τρόπος είναι να ελέγχουμε για ποιες τιμές των-της μεταβλητής επιτυγχάνεται ο αριθμός αυτός.

- Αφορμή για το άρθρο αυτό, αποτέλεσε μία παραλλαγή άσκησης του σχολικού βιβλίου (που βρήκα σε φροντιστηριακό) όπου, επιπλέον, ζητούνταν η μέγιστη τιμή ενός μέτρου, <u>χωρίς όμως να εξετάζεται αν αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί.</u> Στη συνέχεια, μεταφέρω την αρχική άσκηση (του σχολικού βιβλίου), το ερώτημα για το μέγιστο μέτρο και ένα δικό μου, που αφορά τη δυνατότητα επίτευξής του :

Άσκηση 5

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w=\frac{2z-i}{iz+2}$.

Α. Αποδείξτε ότι: αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$, τότε το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού w.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Γ. Για ποια τιμή του z προκύπτει η παραπάνω μέγιστη τιμή;

Λύση

Α. Θα δείξουμε ότι: αν $|z| = 1$ τότε $|w| = 1$.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι, για παράδειγμα:

$$|w| = \frac{|2z-i|}{|iz+2|} = \frac{|2z-i|}{|\overline{iz+2}|} = \frac{|2z-i|}{\left|-\frac{i}{z}+2\right|} = \frac{|2z-i|}{\left|\frac{-i+2z}{z}\right|} = \frac{|2z-i|}{\frac{|2z-i|}{1}} = 1,$$

αφού $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Β. Αν $M(z)$, $K(w)$ οι εικόνες των z, w τότε $|z-w| = (MK)$. Τα M, K βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας $\rho = 1$ οπότε η μέγιστη τιμή του (MK) προκύπτει όταν η χορδή MK γίνει διάμετρος.

Συμπεραίνουμε ότι: $|z-w|_{max} = 2$.

Γ. Τα σημεία M, K είναι αντιδιαμετρικά όταν είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο O του κύκλου. Τούτο συμβαίνει όταν οι z, w είναι αντίθετοι, δηλαδή όταν: $z + w = 0 \Leftrightarrow z + \frac{2z-i}{iz+2} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^2 - 4zi - 1 = 0$.

Έχουμε: $\Delta = (-4i)^2 - 4(-1) = -12 < 0$

άρα $z_{1,2} = \frac{4i \pm \sqrt{12}i}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Στο (Γ) ερώτημα χρησιμοποιήσαμε τύπο διακρίνουσας με μη πραγματικό αριθμό. Τα αποτελέσματα είναι φυσικά έγκυρα, ωστόσο αυτή η περίπτωση δεν περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο.
- Τελικά, η παρτίδα σώθηκε! Με την έννοια ότι είχαμε όντως μέγιστη τιμή (και όχι φράγμα) το 2. Ωστόσο, το πρόβλημα είναι γενικότερο: όταν δύο μεταβλητοί μιγαδικοί z, w αλληλεξαρτώνται και γνωρίζουμε τις γραμμές κίνησης των εικόνων τους, τότε δεν είναι σίγουρο ότι αυτό που «νομίζουμε» ως ακρότατη τιμή του $|z-w|$ μπορεί να επιτευχθεί. Κι αυτό γιατί, ενδέχεται οι «ιδανικές» θέσεις των εικόνων

τους να μην επιτυγχάνονται ταυτόχρονα, εφόσον η οποιαδήποτε θέση της μίας εικόνας καθορίζει αυτόματα και τη θέση της άλλης, μέσω της σταθερής σχέσης που συνδέει τους δύο μιγαδικούς.

- Αν, για παράδειγμα $w=\frac{z-i}{zi+1}$ και $|z|=1$, εύκολα βρίσκουμε ότι

και $|w|=1$. Θα περίμενε κανείς ότι η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ είναι 2.

Αλλά αυτό συμβαίνει όταν: $z+w=0 \Leftrightarrow z+\frac{z-i}{iz+1}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2-2zi-1=0 \Leftrightarrow (z-i)^2=0 \Leftrightarrow z=i$, τιμή που όμως απορρίπτεται αφού μηδενίζει τον παρονομαστή του w !

Βέβαια, ο παρατηρητικός λύτης ίσως πρόσεχε ότι: $w=\frac{i(z-i)}{i(iz+1)}=$

$=\frac{i(z-i)}{-z+i}=\frac{i(z-i)}{-(z-i)}$ δηλαδή ότι $w=-i$!!!

Με άλλα λόγια, <u>ο w είναι σταθερός μιγαδικός</u>. Τώρα είναι: $|z-w|=|z+i|=(MA)$ όπου $A(0,1)$ ενώ το $M(z)$ βρίσκεται στον κύκλο $(O,1)$. Το μήκος (MA) δε μεγιστοποιείται, αφού το M δε μπορεί να βρεθεί στη θέση $(0,1)$, εξαιτίας του ότι $iz+1\neq 0 \Leftrightarrow z\neq i$.

5. Διερεύνηση

- Θα εξετάσουμε τώρα τις συνθήκες κάτω από τις οποίες <u>δύο συνδεόμενοι μιγαδικοί z, w</u> του <u>ίδιου μέτρου</u> <u>δε δίνουν μέγιστη τιμή</u> στο μέτρο $|z-w|$.

- Ταυτόχρονα, στην πορεία της διερεύνησης, θα προκύψει κι ένας μηχανισμός παραγωγής «σωστών» εκφωνήσεων, ο οποίος δίνει ανεξάντλητο πλήθος ασκήσεων, παρόμοιας -δυστυχώς- μορφής.

- Έστω, λοιπόν, οι μιγαδικοί z, w με $w=\frac{z+\alpha i}{\beta iz+\gamma}$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και

$|z|=c>0$. Απαιτούμε και $|w|=c$, ώστε οι εικόνες των z, w να βρίσκονται στον ίδιο κύκλο (O,c). Αυτό συμβαίνει όταν: $|z+\alpha i|=c|\beta iz+\gamma| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+\alpha i)(\bar{z}-\alpha i)=c^2(\beta iz+\gamma)(-\beta i\bar{z}+\gamma)$

και, μετά τις πράξεις: $c^2+\alpha^2-\alpha(z-\bar{z})i=c^4\beta^2+c^2\gamma^2+c^2\beta\gamma(z-\bar{z})i$, <u>για κά-</u>

θε z με $|z| = c$.

Συμπεραίνουμε ότι: $\boldsymbol{\alpha = -c^2\beta\gamma}$ και $\boldsymbol{c^2 + \alpha^2 = c^4\beta^2 + c^2\gamma^2}$ (1).

Λόγω της πρώτης σχέσης: $w = \dfrac{z - c^2\beta\gamma i}{\beta iz + \gamma}$

ενώ $(1) \Leftrightarrow c^2 + c^4\beta^2\gamma^2 = c^4\beta^2 + c^2\gamma^2$,

σχέση που οδηγεί στην: $\boldsymbol{(c\beta)^2 = 1}$ **ή** $\boldsymbol{\gamma^2 = 1}$.

- Με τις παραπάνω συνθήκες, η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ είναι $2c$, όσο η διάμετρος του κύκλου στον οποίο βρίσκονται οι δύο εικόνες.
  Αυτό είναι πραγματοποιήσιμο μόνον όταν:
  $z + w = 0 \Leftrightarrow z + \dfrac{z - c^2\beta\gamma i}{\beta iz + \gamma} = 0$,
  που οδηγεί στην εξίσωση: $\beta z^2 - (\gamma + 1)zi - c^2\beta\gamma = 0$ (2).

- Είναι, επομένως, δυνατό να μην προκύψει το αναμενόμενο μέγιστο μέτρο για το $|z - w|$; Ναι! Μόνον όταν η (2) έχει διπλή ρίζα την τιμή του z που απαγορεύει την ύπαρξη του w, δηλαδή την $-\dfrac{\gamma}{\beta i} = \dfrac{\gamma}{\beta} i$.
  Έστω, λοιπόν, ότι: $\Delta = 0$ (3)
  και $\beta \cdot \left(\dfrac{\gamma i}{\beta}\right)^2 - (\gamma + 1)\dfrac{\gamma i}{\beta} - c^2\beta\gamma = 0$ (4).

- Η (3) οδηγεί στην $\boldsymbol{(\gamma + 1)^2 = 4\beta^2 c^2 \gamma}$.

- Η (4) στην $\boldsymbol{\gamma\left(c^2\beta^2 - 1\right) = 0}$ από όπου: $\boldsymbol{\gamma = 0}$ **ή** $\boldsymbol{c\beta^2 = 1}$.

- **Συνοπτικά:** Μία άσκηση που ζητά προσδιορισμό μέγιστης τιμής για το $|z - w|$ είναι προβληματική, όταν ικανοποιείται το σύστημα συνθηκών:
  (Σ_1): $\boldsymbol{\gamma^2 = 1}$ **ή** $\boldsymbol{c\beta^2 = 1}$
  (Σ_2): $\boldsymbol{(\gamma + 1)^2 = 4\beta^2 c^2 \gamma}$
  (Σ_3): $\boldsymbol{\gamma = 0}$ **ή** $\boldsymbol{(c\beta)^2 = 1}$

- Διερευνούμε με βάση τις τελευταίες συνθήκες:

Αν $\gamma = 0$ η (Σ_2) δίνει $1 = 0$.

Έτσι, πρέπει $(\mathbf{c\beta})^2 = \mathbf{1}$

οπότε ικανοποιείται η (Σ_1) ενώ η (Σ_2) δίνει $(\gamma+1)^2 = 4\gamma$, άρα $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}$.

Τελικά: $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}$ **και** $(\mathbf{c\beta})^2 = \mathbf{1}$,

οπότε ο w γίνεται: $w = \dfrac{z - c^2\beta i}{\beta iz+1} = \dfrac{z - \frac{\beta}{\beta^2}i}{\beta iz+1} = \dfrac{z - \frac{1}{\beta}i}{\beta iz+1} = \dfrac{\beta z - i}{\beta(\beta iz+1)}$.

- **Συμπέρασμα:** Αν $|z| = c$ και $w = \dfrac{\beta z - i}{\beta(\beta iz+1)}$ όπου $\beta \neq 0$,

  τότε $|w| = c$ αλλά το μέτρο $|z - w|$ δεν έχει μέγιστη τιμή το $2c$.

  Ωστόσο <u>ο w είναι τότε σταθερός μιγαδικός</u>, αφού:

  $w = \dfrac{i(\beta z - i)}{i\beta(\beta iz+1)} = \dfrac{\beta iz+1}{i\beta(\beta iz+1)} = \dfrac{1}{\beta i} = -\dfrac{1}{\beta}i$.

- Ποιος είναι ο μηχανισμός παραγωγής «σωστών ασκήσεων», ο οποίος θα αναδεικνυόταν στην πορεία της διερεύνησης;

  Από τις αρχικές συνθήκες (Σ_1) που εγγυώνται ότι $|w| = c$, αν ισχύει η $(c\beta)^2 = 1$, τότε <u>ο w δε μεταβάλλεται</u>.

  Πράγματι, τότε είναι $c^2\beta = 1/\beta$,

  άρα: $w = \dfrac{z - \frac{1}{\beta}\gamma i}{\beta iz+\gamma} = \dfrac{\beta z - \gamma i}{\beta(\beta zi+\gamma)} = \dfrac{\beta z - \gamma i}{\beta i(\beta z - \gamma i)} = -\dfrac{1}{\beta}i$.

  Η συνθήκη $\gamma^2 = 1$, δίνει, με $\gamma = 1$ είτε $\gamma = -1$, <u>μεταβλητούς w</u>.

  Αν, π.χ. $\gamma = -1$, $\beta = 1$ και $c = 3$, τότε παράγεται η παρακάτω

Άσκηση 6

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \dfrac{z+9i}{iz-1}$ και $|z| = 3$.

Α. Αποδείξτε ότι και $|w| = 3$.

Β. Βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Γ. Για ποια τιμή του z το παραπάνω μέτρο γίνεται μέγιστο;

[Απάντηση: $|z-w|_{max} = 6$, όταν $z = \pm 3i$]

6. Εφιαλτικός Επίλογος

Γιατί περιοριστήκαμε σε μιγαδικούς z και $w = f(z)$ με $|z| = |w|$; Ας δούμε και μία περίπτωση στην οποία οι z, w να έχουν διαφορετικά μέτρα:

Άσκηση 7

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}$. Η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Α. Αποδείξτε ότι: η εικόνα του w βρίσκεται σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 1.

Β. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Λύση

Δόθηκε ότι $|z| = 2$ άρα $z\bar{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$

οπότε $\bar{z} = \dfrac{4}{z}$.

Α. Είναι: $|w| = \dfrac{|3z+2i|}{\left|\dfrac{4i}{z}+6\right|} = \dfrac{|3z+2i|}{\left|\dfrac{6z+4i}{z}\right|} = \dfrac{|3z+2i|}{\dfrac{2|3z+2i|}{|z|}} = \dfrac{|z|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Β. Είναι $|z - w| = (MK)$, όπου $M(z)$, $K(w)$.

Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $|z-w|_{min} = 1$

ενώ $|z-w|_{max} = 3$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Είναι $|z-w| = \left|z - \dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right| = \left|\dfrac{i|z|^2+6z-3z-2i}{i\bar{z}+6}\right| = \left|\dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right| =$

  $= |w| = 1$! δηλαδή $|z-w|$=σταθερό

  οπότε $|z-w|_{min} = |z-w|_{max} = 1$!!

- Διαφορετικά:

  Θέτοντας $z = x + yi$ έχουμε $x^2 + y^2 = 4$

οπότε: $w=\dfrac{3(x+yi)+2i}{i(x-yi)+6}=...=$

$=\dfrac{2x(3y+10)}{x^2+(y+6)^2}+\dfrac{3y^2-3x^2+20y+12}{x^2+(y+6)^2}i$.

Όμως ισχύει και

$x^2+(y+6)^2=x^2+y^2+12y+36=40+12y=4(3y+10)$

αφού $x^2+y^2=4$.

Ακόμη: $3y^2-3x^2+20y+12=3y^2-3(4-y^2)+20y+12=$

$=6y^2+20y=2y(3y+10)=2y(3y+10)$.

Τελικά, η αλγεβρική μορφή του w γίνεται:

$w=\dfrac{2x}{4}+\dfrac{2y}{4}i\Leftrightarrow w=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}i$

οπότε $|z-w|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}i\right|=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{4}}=1=$ σταθερό

(ή και: $|z|=2\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{4}{z}$,

άρα $w=\dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}=\dfrac{3z+2i}{i\cdot\dfrac{4}{z}+6}=\dfrac{z(3z+2i)}{2(3z+2i)}=\dfrac{z}{2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}i$ κ.λπ).

- Γεωμετρικά, είναι εντυπωσιακό: Η εικόνα $K(x/2, y/2)$ του w είναι το σημείο όπου η ακτίνα OM [$M(x,y)$ είναι η εικόνα του z] τέμνει τον κύκλο $(O,1)$. Φανταστείτε μία περιστρεφόμενη ακτίνα OM: τα σημεία O, K, M είναι πάντα συνευθειακά!

7. Παράρτημα: Το 3^o Θέμα του 2006

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

α. Να αποδείξετε ότι: i) $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

ιι) $|z_1-z_2|^2\leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\geq -1$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

- **1^{η} Λύση για το (α)**

Είναι $|z_1+z_2|=|-z_3|=1$ άρα $|z_1+z_2|^2=1$ από όπου παίρνουμε διαδοχικά:

$|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2=1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\dfrac{1}{2}\geq -1$.

Έτσι: $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_1|^2=3$

άρα $|z_1-z_2|^2=3\leq 4$.

Τέλος $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ και όμοια $|z_3-z_1|=\sqrt{3}=|z_2-z_3|$,
οπότε αποδείχτηκε και το ερώτημα (i).

- **2^{η} Λύση για το (α)**

Θέτοντας $z_k=x_k+y_k i$ έχουμε $x_k{}^2+y_k{}^2=1$ με $k=1,2,3$.
Η σχέση $z_1+z_2+z_3=0$ δίνει $x_1+x_2+x_3=0$ και $y_1+y_2+y_3=0$.
Έτσι: $x_1+x_2=-x_3$ και $y_1+y_2=-y_3$.
Θα είναι, λοιπόν, και: $(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(-x_3)^2+(-y_3)^2$

και μετά τις πράξεις: $x_1x_2+y_1y_2=-\dfrac{1}{2}$.

Τώρα: $|z_1-z_2|^2=\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)^2=$

$=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)=3$,

άρα $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ και $|z_1-z_2|^2=3\leq 4$.

Τέλος $z_1\overline{z_2}=(x_1+y_1 i)(x_2-y_2 i)=(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i$

άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\dfrac{1}{2}\geq -1$.

- **Και ένα σχόλιο για το (β)**

Αφού $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ είναι προφανές ότι οι εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο.
Αυτό όμως καθόλου δε σημαίνει ότι «ο γεωμετρικός τόπος των A, B, Γ είναι ο κύκλος $(O,1)$». Κι αυτό επειδή οι z_1, z_2, z_3 είναι επιφορτισμένοι και με την ιδιότητα $z_1+z_2+z_3=0$, η οποία σε συνδυασμό με την $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, συνεπάγεται την $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$, η οποία εγγυάται ότι το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Δεδομένης, λοιπόν, της συγκεκριμένης διατύπωσης περί γεωμετρικού τόπου, η σωστή απάντηση είναι: «Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων A, B, Γ είναι οι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1».

- **2^{η} Λύση για το (α)**

Θέτοντας $z_k = x_k + y_k i$ έχουμε $x_k{}^2 + y_k{}^2 = 1$ με $k = 1,2,3$.
Η σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ δίνει $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.
Έτσι: $x_1 + x_2 = -x_3$ και $y_1 + y_2 = -y_3$.
Θα είναι, λοιπόν, και: $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (-x_3)^2 + (-y_3)^2$

και μετά τις πράξεις: $x_1x_2 + y_1y_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Τώρα: $|z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 3$,

άρα $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ και $|z_1 - z_2|^2 = 3 \leq 4$.

Τέλος $z_1\overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i$

άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -\dfrac{1}{2} \geq -1$.

- **Και ένα σχόλιο για το (β)**

Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ είναι προφανές ότι οι εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο.
Αυτό όμως καθόλου δε σημαίνει ότι «ο γεωμετρικός τόπος των A, B, Γ είναι ο κύκλος $(O,1)$». Κι αυτό επειδή οι z_1, z_2, z_3 είναι επιφορτισμένοι και με την ιδιότητα $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, η οποία σε συνδυασμό με την $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, συνεπάγεται την $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$, η οποία εγγυάται ότι το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.
Δεδομένης, λοιπόν, της συγκεκριμένης διατύπωσης περί γεωμετρικού τόπου, η σωστή απάντηση είναι: «Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων A, B, Γ είναι οι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1».

8. Παράρτημα II: Ασκήσεις με Ακρότατα

Ακολουθούν τρία θέματα με ακρότατα μέτρων μιγαδικών σε συνδυασμό με μελέτη μονοτονίας συνάρτησης.

1ο Θέμα

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $zw + i\bar{z} = \bar{w}$ (1).

Α. Αν $|z| \neq 1$, αποδείξτε ότι: $w = \dfrac{i(z - \bar{z}^2)}{|z|^2 - 1}$

Β. Αν $|z| = 1$, αποδείξτε ότι: $z^3 = 1$ και υπολογίστε τις τιμές των z και w.

Γ. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, αποδείξτε ότι: $\dfrac{2}{3} \le |w| \le 2$.

Λύση

Α. Από την (1) έχουμε

$\bar{z}\bar{w} - iz = w \Leftrightarrow \bar{z}(zw + i\bar{z}) - iz = w \Leftrightarrow |z|^2 w + i\bar{z}^2 - iz = w$

άρα $(|z|^2 - 1)w = i(z - \bar{z}^2)$ (2).

Για $|z| \neq 1$, θα είναι $w = \dfrac{i(z - \bar{z}^2)}{|z|^2 - 1}$.

Β. Όταν $|z| = 1$, η (2) γίνεται $z - \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}^2$ και αφού $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$,

βρίσκουμε $z = \left(\dfrac{1}{z}\right)^2 \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

οπότε $z = 1$ ή $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

- Για $z = 1$, η (1) δίνει $w - \bar{w} = -i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = -\dfrac{1}{2}$

άρα $w = x - \dfrac{1}{2}i$, $x \in \mathbb{R}$

- Για $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ και $w = x + yi$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$

η (1) γράφεται $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x+yi)+i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=x-yi$

και μετά τις πράξεις βρίσκουμε $y=x\sqrt{3}+1$.

Έτσι: $w=x+(x\sqrt{3}+1)i$, $x\in\mathbb{R}$.

- Όμοια, αν $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, παίρνουμε $w=x+(1-x\sqrt{3})i$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ. Θεωρώντας τις αλγεβρικές μορφές $z=\alpha+bi$ και $w=x+yi$, είναι $\alpha^2+b^2=4$. Συμπεραίνουμε ότι $b^2=4-\alpha^2\geq 0$

άρα $\alpha\in[-2,2]$.

Έτσι: $i(z-\overline{z}^2)=i[\alpha+bi-(\alpha-bi)^2]=...=-b(2\alpha+1)+(\alpha-\alpha^2+b^2)i$ και αφού $b^2=4-\alpha^2$,

παίρνουμε τελικά: $i(z-\overline{z}^2)=-b(2\alpha+1)+(\alpha-2\alpha^2+4)i$.

Η ισότητα $w=\frac{i(z-\overline{z}^2)}{|z|^2-1}$ δίνει τώρα: $x=-\frac{b}{3}(2\alpha+1)$

και $y=\frac{\alpha-2\alpha^2+4}{3}$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε:

$x^2+y^2=\frac{1}{9}[(4-\alpha^2)(4\alpha^2+4\alpha+1)+(\alpha-2\alpha^2+4)^2]=...=$

$=\frac{1}{9}(-8\alpha^3+24\alpha+20)$.

Έτσι: $|w|^2=x^2+y^2=\frac{1}{9}\cdot f(\alpha)$ όπου θέσαμε $f(\alpha)=-8\alpha^3+24\alpha+20$ με $\alpha\in[-2,2]$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή $f(-2)=f(1)=36$ και ελάχιστη $f(-1)=f(2)=4$.

Συμπεραίνουμε ότι $|w|^2_{max}=\frac{1}{9}\cdot 36=4$ και $|w|^2_{min}=\frac{1}{9}\cdot 4=\frac{4}{9}$.

Έτσι $|w|_{max}=2$, $|w|_{min}=\frac{2}{3}$ και συνεπώς: $\frac{2}{3}\leq|w|\leq 2$.

2^o Θέμα

Δίνεται η εξίσωση: $z^2-2\lambda(\lambda+2)z+2\lambda^2(\lambda+2)^2=0$, **(1)**

όπου $\lambda \in (-2,0)$.

Α. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών της z_1, z_2.

Β. Αποδείξτε ότι οι εικόνες των αριθμών 0, z_1, z_2 σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Γ. Έστω $f(x) = x^2 + 2x$ όπου $x \in (-2,0)$. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ όπου z_1, z_2 οι ρίζες της (1) και να αποδείξετε ότι το $|z_1 - z_2|$ δεν έχει ελάχιστη τιμή.

Λύση

Α. Είναι $\Delta = ... = -[2\lambda(\lambda+2)]^2 < 0$ αφού $\lambda(\lambda+2) \neq 0$.

Έτσι οι ρίζες της (1) είναι $z_{1,2} = \lambda(\lambda+2) \pm \lambda(\lambda+2)i$.

Το σημείο $M_1 = \big(\lambda(\lambda+2), \lambda(\lambda+2)\big)$ κινείται στην ευθεία $y = x$,

ενώ το $M_2 = \big(\lambda(\lambda+2), -\lambda(\lambda+2)\big)$ στην $y = -x$.

Β. Αφού $z_2 = \overline{z}_1$, τα σημεία M_1 και M_2 είναι συμμετρικά ως προς τον $x'x$ άρα το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ σχηματίζει γωνία 225° με τον $x'x$, ενώ το $\overrightarrow{OM_2}$ γωνία 135°, αφού $\lambda(\lambda+2) < 0$.

Έτσι $\widehat{M_2OM_1} = 225^\circ - 135^\circ = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

Γ. Είναι $f'(x) = 2x + 2$, με ρίζα το -1.

Είναι $f \downarrow (-2,-1]$ και $f \uparrow [-1,0)$ με $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και $f(-1) = -1$

άρα $f\big((-2,0)\big) = [-1,0)$.

Δ. Είναι: $|z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z}_1| = 2|\mathrm{Im}(z_1)| = 2\left|\lambda^2 + 2\lambda\right| = 2|f(\lambda)|$.

Όμως, λόγω του (Γ) ερωτήματος, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$ είναι το διάστημα $(0,1]$.

Έτσι: $|z_1 - z_2|_{max} = 2$.

Επίσης το σύνολο $(0,1]$ είναι ανοικτό αριστερά, οπότε το μέτρο δεν παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

3^o Θέμα

Α. **Η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Αποδείξτε ότι: $\beta > 0$ και το μέτρο των ριζών της είναι $\sqrt{\beta}$.**

Β. **Δίνεται η εξίσωση $z^2 - (\lambda^5 - 5\lambda)\cdot z + 4 = 0$ όπου $\lambda \in (-1,1)$**

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = x^5 - 5x$ με $x \in (-1,1)$.

ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει δύο μη πραγματικές ρίζες z_1, z_2.

iii) Αποδείξτε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.

iv) Αποδείξτε ότι $|z_1 - z_2| \le 4$

v) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (-1,1)$ για την οποία το μέτρο $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστο, καθώς και τους z_1, z_2 σε αυτή την περίπτωση.

Λύση

Α. Προφανώς $\Delta < 0$ άρα $\alpha^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow \beta > \frac{\alpha^2}{4} \ge 0$ οπότε $\beta > 0$.

Ακόμη για τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης από τους τύπους του Vieta θα έχουμε $z_1 z_2 = \beta$

άρα $|z_1 z_2| = |\beta| = \beta \Leftrightarrow |z_1 \bar{z}_1| = \beta \Leftrightarrow |z_1|^2 = \beta \Leftrightarrow |z_1| = \sqrt{\beta}$ …

Β. i) Είναι $f'(x) = 5(x^2+1)(x^2-1) < 0$ αφού $x \in (-1,1)$.

Έτσι $f \downarrow (-1,1)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-4,4)$.

ii) Έχουμε $\Delta = (\lambda^5 - 5\lambda)^2 - 16 = f^2(\lambda) - 16 = (f(\lambda)-4)(f(\lambda)+4) < 0$ αφού $-4 < f(\lambda) < 4$, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

iii) Από το (Α) ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $|z_1| = |z_2| = \sqrt{4} = 2$, επομένως οι εικόνες M_1 και M_2 των μιγαδικών βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

iv) Είναι $|z_1 - z_2| = (M_1 M_2)$ και το μήκος της χορδής $M_1 M_2$ δεν υπερβαίνει τη διάμετρο του κύκλου.

Έτσι $|z_1 - z_2| \le 4$.

v) Το μέτρο μπορεί να γίνει μέγιστο και ίσο με 4, όταν τα M_1 και M_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

Τούτο συμβαίνει μόνον όταν: $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^5 - 5\lambda = 0$, από τους τύπους του Vieta στην (1).

Συμπεραίνουμε ότι: $\lambda(\lambda^4 - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = \pm\sqrt[4]{5}$.

Όμως $\pm\sqrt[4]{5} \notin (-1,1)$ επομένως $\lambda = 0$.

Η εξίσωση (1) δίνει τώρα: $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = \pm 2i$, που είναι οι ζητούμενες ρίζες.