Και όμως...,τα **κοινά σημεία** των γραφικών παραστάσεων δύο **αντίστροφων συναρτήσεων**, αν υπάρχουν, βρίσκονται **μόνο** πάνω στην ευθεία **y=x**.

Οι Εμπειρίες μου 18 μήνες μετά!!!

ΑΝΔΡΕΑΣ Λ. ΠΕΤΡΑΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Πιστεύετε ότι οι πίνακες

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{και} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ίσοι;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Πιστεύετε ότι τα διανύσματα

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} = (1,-1) \quad \textbf{και} \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1)$$

είναι ίσα;

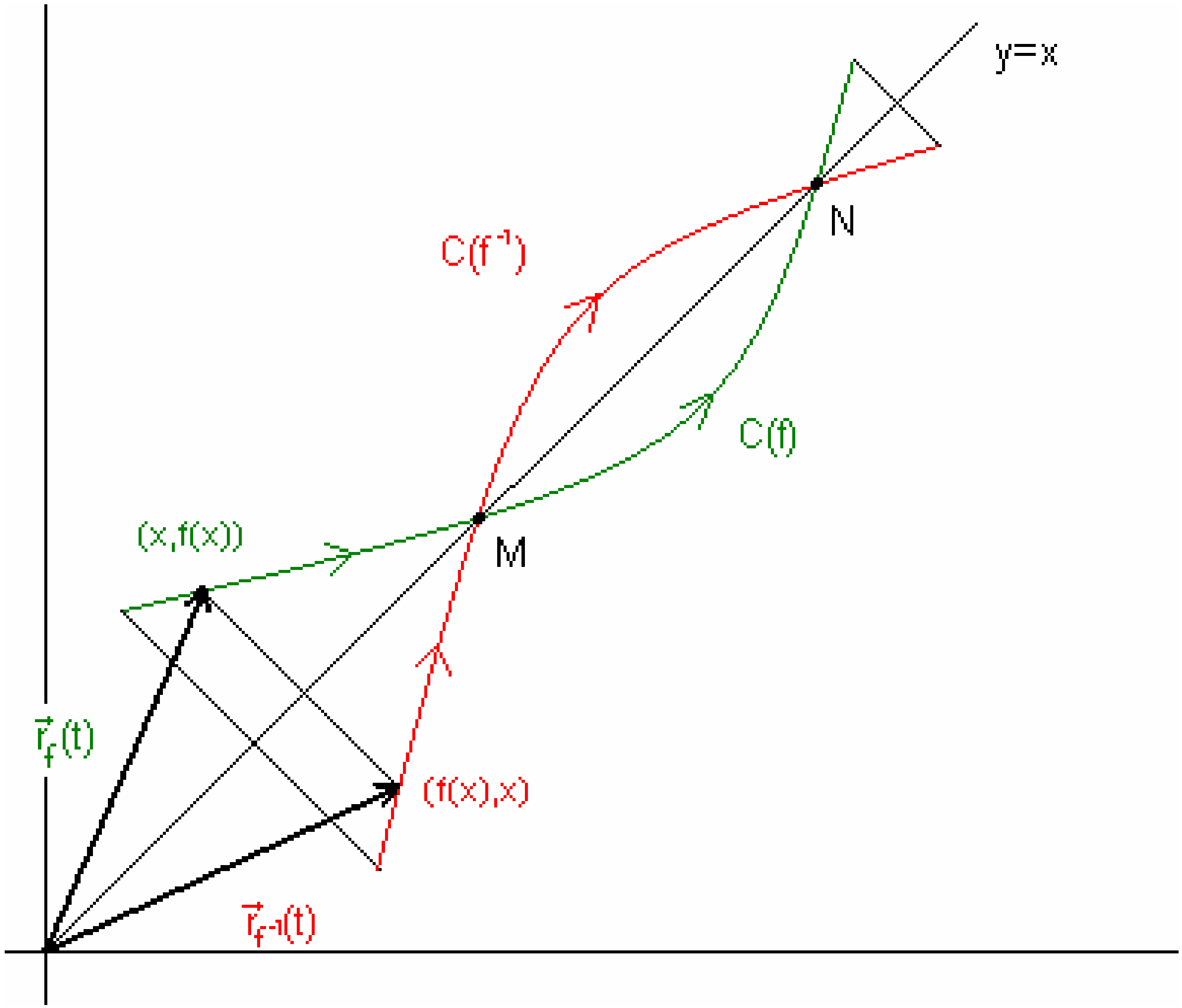
ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Πιστεύετε ότι υπάρχουν έννοιες ή θεωρήματα ή ορισμοί οι οποίοι αν εφαρμοστούν σε δύο ίσες συναρτήσεις μπορούν να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Πιστεύετε ότι οι επόμενοι κούροι είναι ίσοι;

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



Διανυσματικές εξισώσεις αντίστροφων συναρτήσεων

Έστω μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: D(f) \to R$ και

$f^{-1}: D(f^{-1}) \to R$ η αντίστροφή της.

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} είναι

$$\vec{r}_f(t) = t \cdot \vec{i} + f(t) \cdot \vec{j}, \quad t \in D(f) \text{ και}$$

$$\vec{r}_{f^{-1}}(t) = f(t) \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}, \quad t \in D(f).$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο αντίστροφων συναρτήσεων f, f^{-1} βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση

$$\vec{r}_f(t) = \vec{r}_{f^{-1}}(t), \quad t \in D(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = t, \quad t \in D(f).$$

Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f: D(f) \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε το διάνυσμα

$$\dot{\vec{r}}_f(t) = 1 \cdot \vec{i} + f'(t) \cdot \vec{j}\ ,\ t \in D(f)$$

είναι εφαπτόμενο στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(t, f(t))$ και μάλιστα καθορίζει και την φορά διαγραφής της $C(f)$.

Αντίστοιχα το διάνυσμα

$$\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t) = f'(t) \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}\ ,\ \ t \in D(f)$$

είναι εφαπτόμενο στην γραφική παράσταση της f^{-1} στο αντίστοιχο σημείο $M'(f(t), t)$ και μάλιστα καθορίζει και την φορά διαγραφής της $C(f^{-1})$.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην συνάρτηση

$f(x)=4-x,\ x\in R$

Παίρνουμε

$$\dot{\vec{r}}_f(t)=1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}=(1,-1),\ t\in D(f)\ \text{και}$$

$$\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t)=-1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}=(-1,1),\ \ t\in D(f).$$

Αν «υποθέσουμε» ότι οι δύο συναρτήσεις

$$f(x)=4-x,\ f^{-1}(x)=4-x,\ x\in R$$

είναι ίσες καταλήγουμε στο «καταπληκτικό» συμπέρασμα ότι ενώ οι συναρτήσεις είναι ίσες, τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιοδήποτε σημείο των γραφικών τους παραστάσεων κατά την φορά διαγραφής τους, είναι αντίθετα!!!

ΙΣΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: D(f) \to R$ και $f^{-1}: D(f^{-1}) \to R$ η αντίστροφή της.

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο αντίστροφων συναρτήσεων f, f^{-1} είναι

$$\vec{r}_f(t) = t \cdot \vec{i} + f(t) \cdot \vec{j}, \quad t \in D(f) \text{ και}$$

$$\vec{r}_{f^{-1}}(t) = f(t) \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}, \quad t \in D(f).$$

Οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες
αν και μόνο αν ισχύει

$$\vec{r}_f(t) = \vec{r}_{f^{-1}}(t), \quad \forall t \in D(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = t, \quad \forall t \in D(f).$$

Που σημαίνει ισοδύναμα ότι η συνάρτηση f είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο σύνολο $D(f)$.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ορίζει ένα

γραμμικό μετασχηματισμό $L : R^2 \to R^2$ στο σύνολο R^2, με $L(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$

Προφανώς διαφορετικοί πίνακες ορίζουν και διαφορετικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς.
Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $L : R^2 \to R^2$ προκύπτει ένας διανυσματικός υπόχωρός του M , ο οποίος περιέχει εκείνα τα στοιχεία του R^2 που παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό δηλαδή ισχύει $M = \{(x, y) \in R^2,\ \mu\varepsilon\ L(x, y) = (x, y)\}$.

Ειδικά ο πίνακας $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ορίζει τον

ταυτοτικό γραμμικό μετασχηματισμό του R^2,
δηλαδή τον μετασχηματισμό που ορίζεται
από την σχέση $L(x, y) = (x, y)$, για κάθε $(x, y) \in R^2$.
Προφανώς είναι $M = R^2$, δηλαδή όλα τα στοιχεία του R^2
παραμένουν αναλλοίωτα με τον μετασχηματισμό αυτό.
Εφαρμόζοντας τον ταυτοτικό γραμμικό μετασχηματισμό
στο γράφημα οποιασδήποτε συνάρτησης f βρίσκουμε
συνάρτηση g ίση με αυτή.

Δηλαδή αν έχουμε δύο ίσες συναρτήσεις τότε η μία είναι
εικόνα της άλλης μέσω του ταυτοτικού μετασχηματισμού.

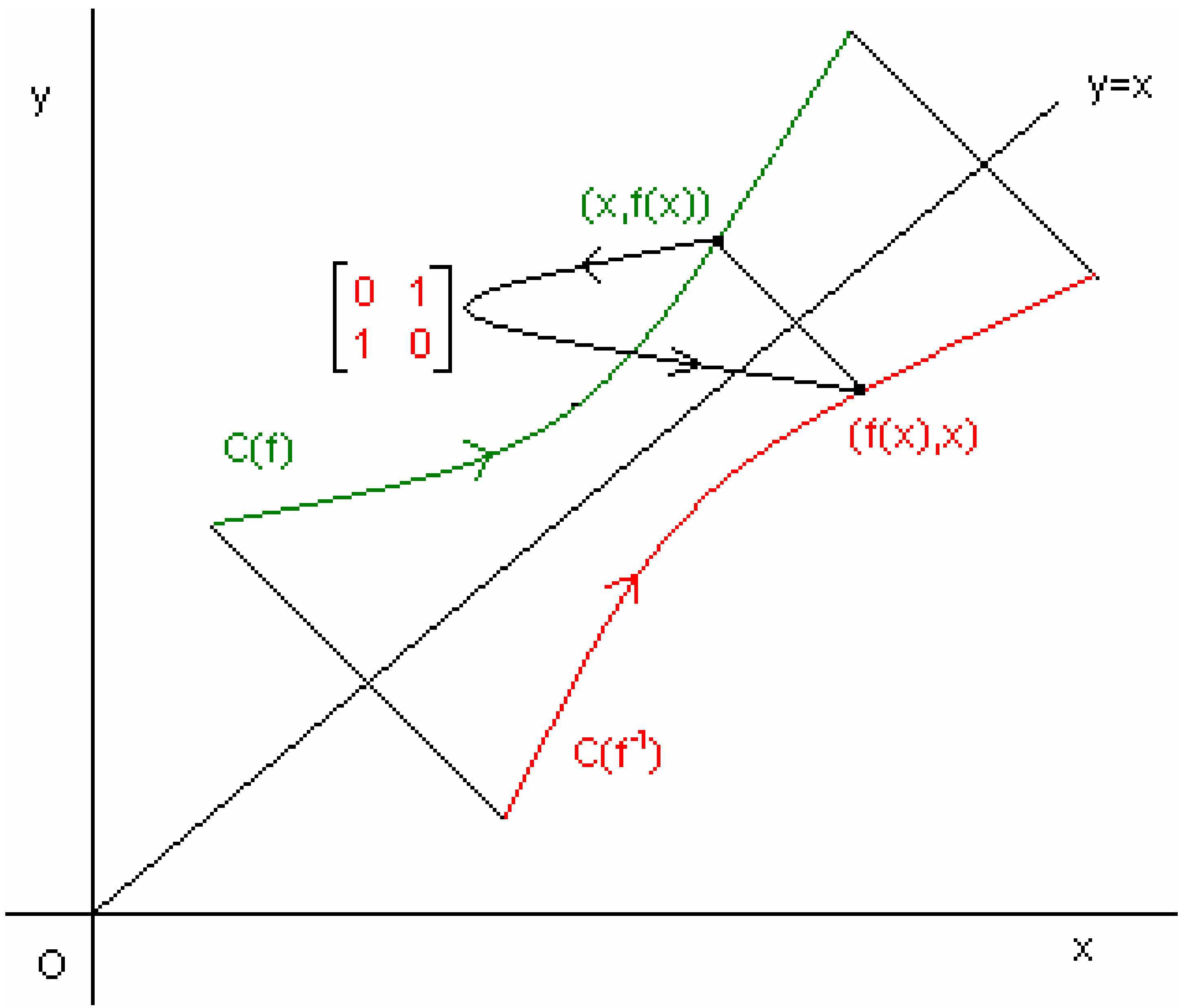
Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ορίζει και αυτός ένα γραμμικό μετασχηματισμό του R^2, και μάλιστα για τον μετασχηματισμό αυτό ισχύει

$L(x, y) = (y, x)$, για κάθε $(x, y) \in R^2$.

Προφανώς είναι $M = \{(x, x) / x \in R\}$, δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου M παραμένουν αναλλοίωτα με τον μετασχηματισμό αυτό και δεν είναι άλλα από τα σημεία της ευθείας $y = x$.

Εφαρμόζοντας τον γραμμικό αυτό μετασχηματισμό στο γράφημα οποιασδήποτε 1-1 συνάρτησης f βρίσκουμε το γράφημα της αντίστροφή της f^{-1}.

Δηλαδή αν έχουμε δύο αντίστροφες συναρτήσεις συναρτήσεις τότε το γράφημα της μιας είναι εικόνα του γραφήματος της άλλης μέσω του παραπάνω γραμμικού μετασχηματισμού.



y
y=x
(x,f(x))
0 1
1 0
C(f)
(f(x),x)
C(f-1)
O
x

Αφού λοιπόν, λόγω ορισμού, η γραφική παράσταση της αντίστροφης είναι η εικόνα της γραφικής παράστασης της αρχικής συνάρτησης μέσω γραμμικού μετασχηματισμού, η έννοια του κοινού σημείου αντικαθίσταται με την έννοια του αναλλοίωτου σημείου.

Έτσι τελικά τα αναλλοίωτα σημεία των συνόλων

$C(f) = \{M(x, f(x)) / x \in D(f)\}$ και

$C(f^{-1}) = \{N(f(x), x) / x \in D(f)\}$

είναι αυτά για τα οποία ισχύει $(x, f(x)) \in M$, ή ισοδύναμα είναι αυτά για τα οποία ισχύει $f(x) = x$. Αυτό προφανώς σημαίνει ότι ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι το εξής:
Υπάρχουν συναρτήσεις που να είναι ίσες με τις αντίστροφές τους;
Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια συνάρτηση είναι ίση με την αντίστροφή της αν και μόνο αν όλα τα σημεία του γραφήματός της είναι αναλλοίωτα ως προς τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό.
Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το γράφημά της είναι υποσύνολο του συνόλου M ,
δηλαδή αν και μόνο αν, είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

Κάποιοι συνάδελφοι ισχυρίστηκαν ότι οι συναρτήσεις $f(x)=4-x$, και $f^{-1}(x)=4-x$, $x\in R$ είναι ίσες.

Αν υποθέσουμε ότι αυτές οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $f=f^{-1}$ τότε προκύπτει ότι τα σημεία του συνόλου $C(f)=\{(x,f(x))/\,x\in R\}$ είναι αναλλοίωτα με τον γραμμικό μετασχηματισμό με πίνακα τον $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, πράγμα άτοπο,

γιατί τα σημεία της $C(f)$ που δεν ανήκουν στο σύνολο $K=\{(x,x)/\,x\in R\}$ δεν είναι αναλλοίωτα.

Για να βρω τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, λύνω ένα από τα επόμενα τέσσερα ισοδύναμα συστήματα

$$(\Sigma 1)\ \begin{cases} f(x)=y \\ y=x \end{cases}, \qquad (\Sigma 2)\ \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y=x \end{cases},$$

$$(\Sigma 3)\ \begin{cases} f(x)=y \\ f(x)=f^{-1}(y) \end{cases}, \qquad (\Sigma 4)\ \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ f(x)=f^{-1}(y) \end{cases}$$

με $x, y \in D(f) \cap D(f^{-1})$

ή μία από τις δύο επόμενες ισοδύναμες εξισώσεις

(Ε1) $f(x)=x$, με $x \in D(f)$

(Ε2) $f^{-1}(y)=y$, με $y \in D(f^{-1})$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΜΕ
ΑΝΑΛΥΣΗ

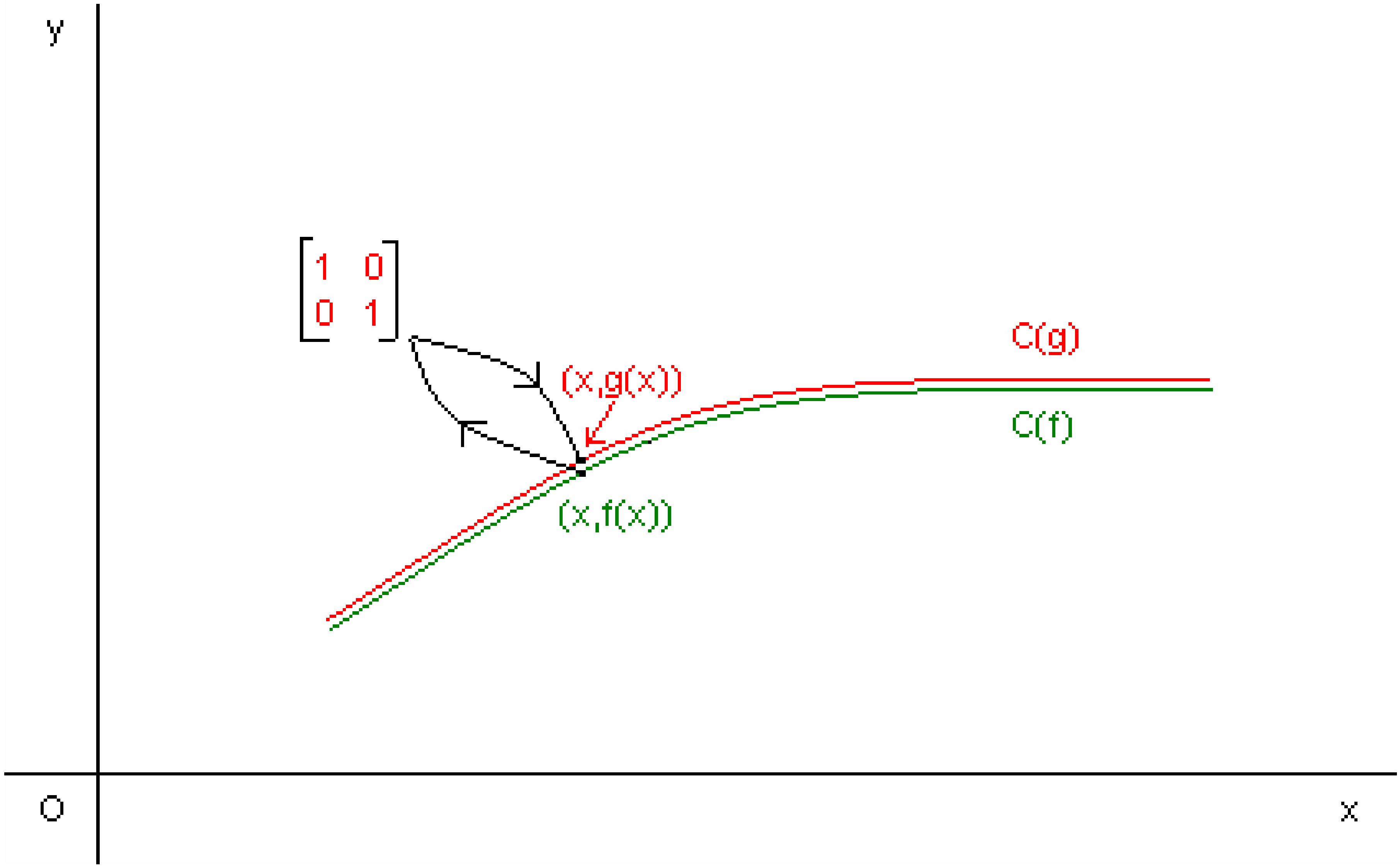
ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A τότε είναι

$f=g \Leftrightarrow (x,f(x))=(x,g(x))$, για κάθε $x \varepsilon A$.

Από τον ορισμό της ισότητας συναρτήσεων προκύπτει ότι η σύγκριση δύο συναρτήσεων γίνεται σημείο-σημείο.

Η μετάβαση από το σημείο $(x,f(x))$ της $C(f)$ στο σημείο $(x,g(x))$ της $C(g)$ γίνεται μέσω του ταυτοτικού γραμμικού μετασχηματισμού $L(x,y)=(x,y)$ με πίκανα μετασχηματισμού τον I_2.


y
1 0
0 1
C(g)
(x,g(x))
C(f)
(x,f(x))
O
x

ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ f, g .

Έστω f, g δύο τυχαίες συναρτήσεις με $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$ και (x_0, y_0) ένα σημείο του επιπέδου.

Το σημείο (x_0, y_0) είναι κοινό σημείο των γραφικών των δύο συναρτήσεων f, g αν και μόνο αν ισχύουν συγχρόνως

- $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ και
- Οι περιορισμοί των δύο συναρτήσεων f, g στο σύνολο $B = \{x_0\}$ είναι ίσες συναρτήσεις με τιμή y_0 .

ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

- Οι λύσεις της εξίσωσης
  (Ε1) $f(x) = g(x)$, με $x \in D(f) \cap D(g)$
  και μόνο αυτές είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο τυχαίων συναρτήσεων f, g.
- Οι λύσεις του συστήματος
  (Σ1) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ με $x \in D(f) \cap D(g)$,
  και μόνο αυτές είναι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων f, g.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=2x$, με $x \in R$.
Η πρώτη παριστάνει μια παραβολή και η δεύτερη μια ευθεία.
Μπορούμε αυτέ τις δύο συναρτήσεις να τις περιορίσουμε σε οποιαδήποτε υποσύνολα του πεδίου ορισμού τους.

Παραδείγματα

1) $f(x)=x^2$, $x \in (0,+\infty)$ και $g(x)=2x$, $x \in (-\infty,0)$
2) $f(x)=x^2$, $x \in [3,5]$ και $g(x)=2x$, $x \in (0,2)$
3) $f(x)=x^2$, $x \in [0,+\infty)$ και $g(x)=2x$, $x \in Z$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $D(f) = R$.

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και είναι
$f'(x) = 2x$, $D(f') = R$.

Η δεύτερη συνάρτηση ορίζεται-παράγεται με την βοήθεια της πρώτης και ενός ορισμού, του ορισμού της παραγώγου. Συνεπώς η δεύτερη συνάρτηση είναι πλήρως συσχετισμένη-εξαρτημένη από την πρώτη.
Προφανώς αν περιορίσω την πρώτη σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της τότε η παράγωγός της επαναπροσδιορίζεται με βάση τα «νέα δεδομένα» της αρχικής συνάρτησης και του ορισμού της παραγώγου.

Παραδείγματα

1) Αν $f(x) = x^2$, $x \in (0,+\infty)$ τότε $f'(x) = 2x$, $x \in (0,+\infty)$

2) $f(x) = x^2$, $x \in [3,5] \cup \{6\}$ τότε $f'(x) = 2x$, $x \in [3,5]$

3) $f(x) = x^2$, $x \in Z$ τότε δεν ορίζεται η $f'(x)$.

Απόψεις του τύπου επειδή ορίστηκαν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $f\,'(x) = 2x$, με $x \in R$,

μπορούμε να τις περιορίσουμε όπου θέλουμε και μπορούμε να τις βλέπουμε από εδώ και στο εξής ως δύο τυχαίες συναρτήσεις **δεν μπορούν να σταθούν στην κοινή μαθηματική λογική.**

Ας πάμε τώρα στο αντίστοιχο του προηγουμένου για τις αντίστροφες συναρτήσεις.
Έστω οι συναρτήσεις
$f(x) = 4 - x$ και $g(x) = 4 - x$, με $x \in R$.
Πρόκειται για δύο ίσες συναρτήσεις, συνεπώς οι περιορισμοί τους σε οποιοδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους είναι ίσες συναρτήσεις.
Προφανώς μπορούμε να τις περιορίσουμε και σε διαφορετικά υποσύνολα του πεδίου ορισμού τους και είναι αυτονόητο ότι οι περιορισμοί αυτοί δεν θα είναι ίσες συναρτήσεις.

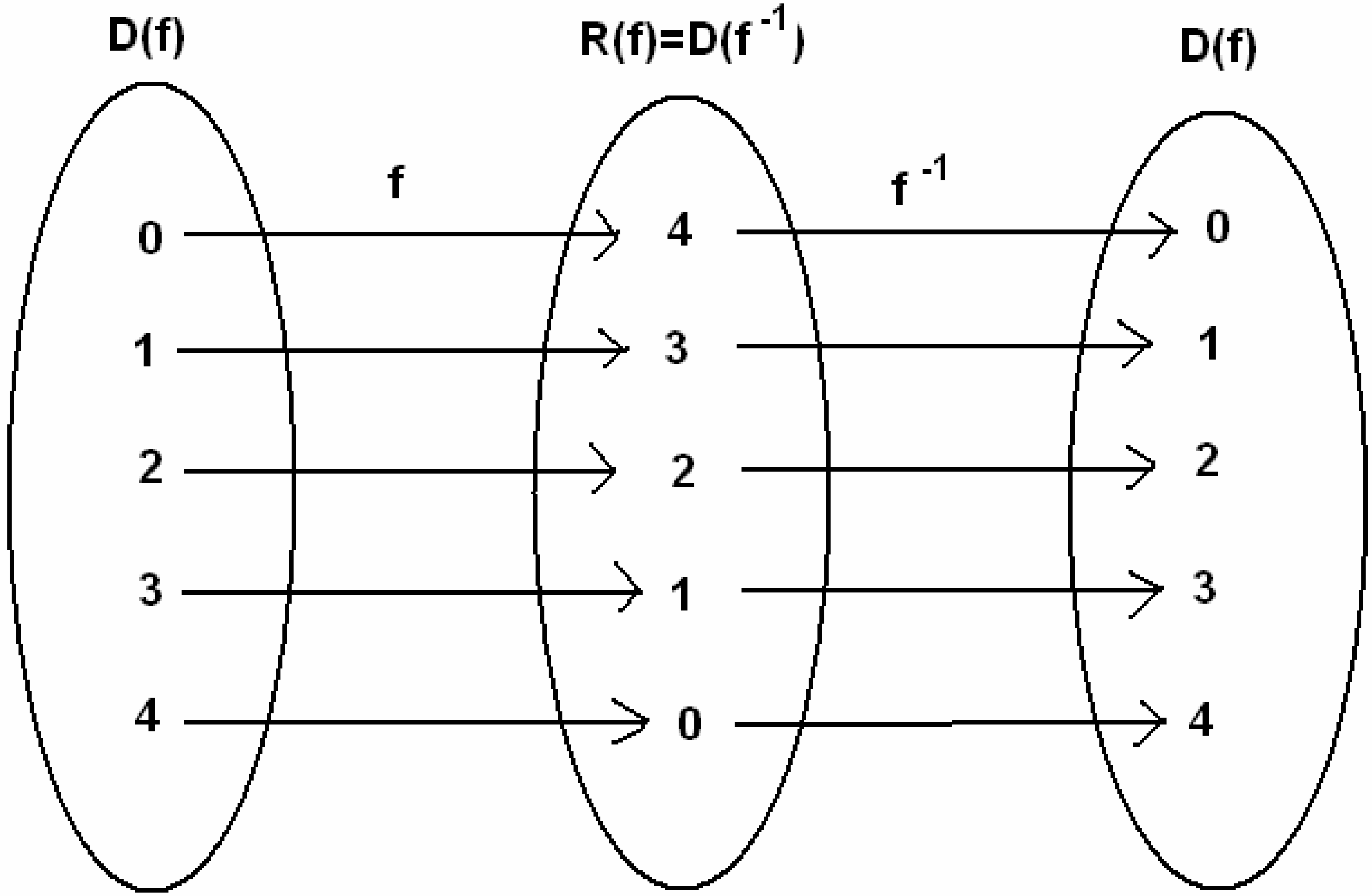
Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4 - x$, $D(f) = R$.

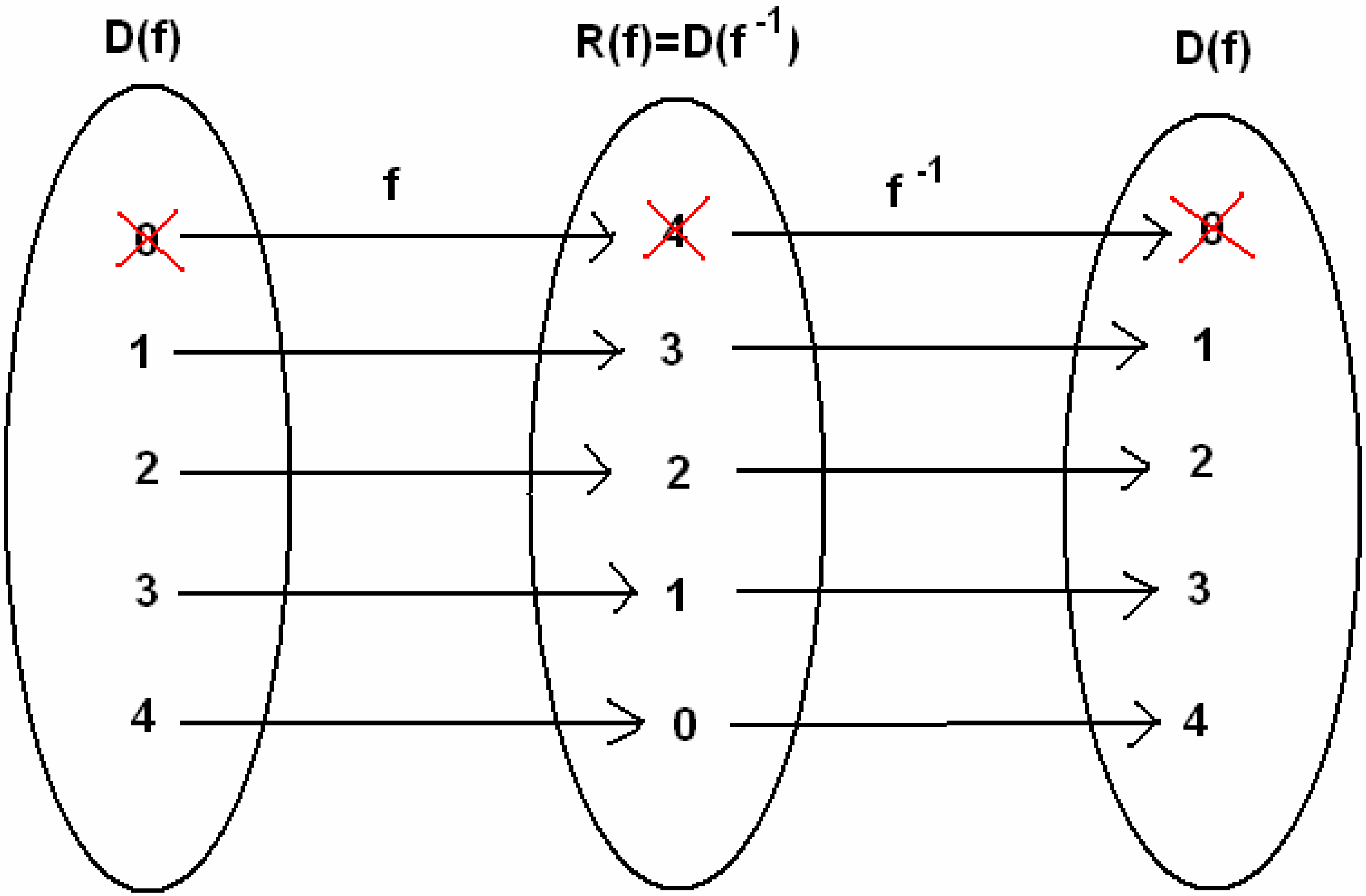
Προφανώς είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι η $f^{-1}(y) = 4 - y$, με $D(f^{-1}) = R(f) = R$.

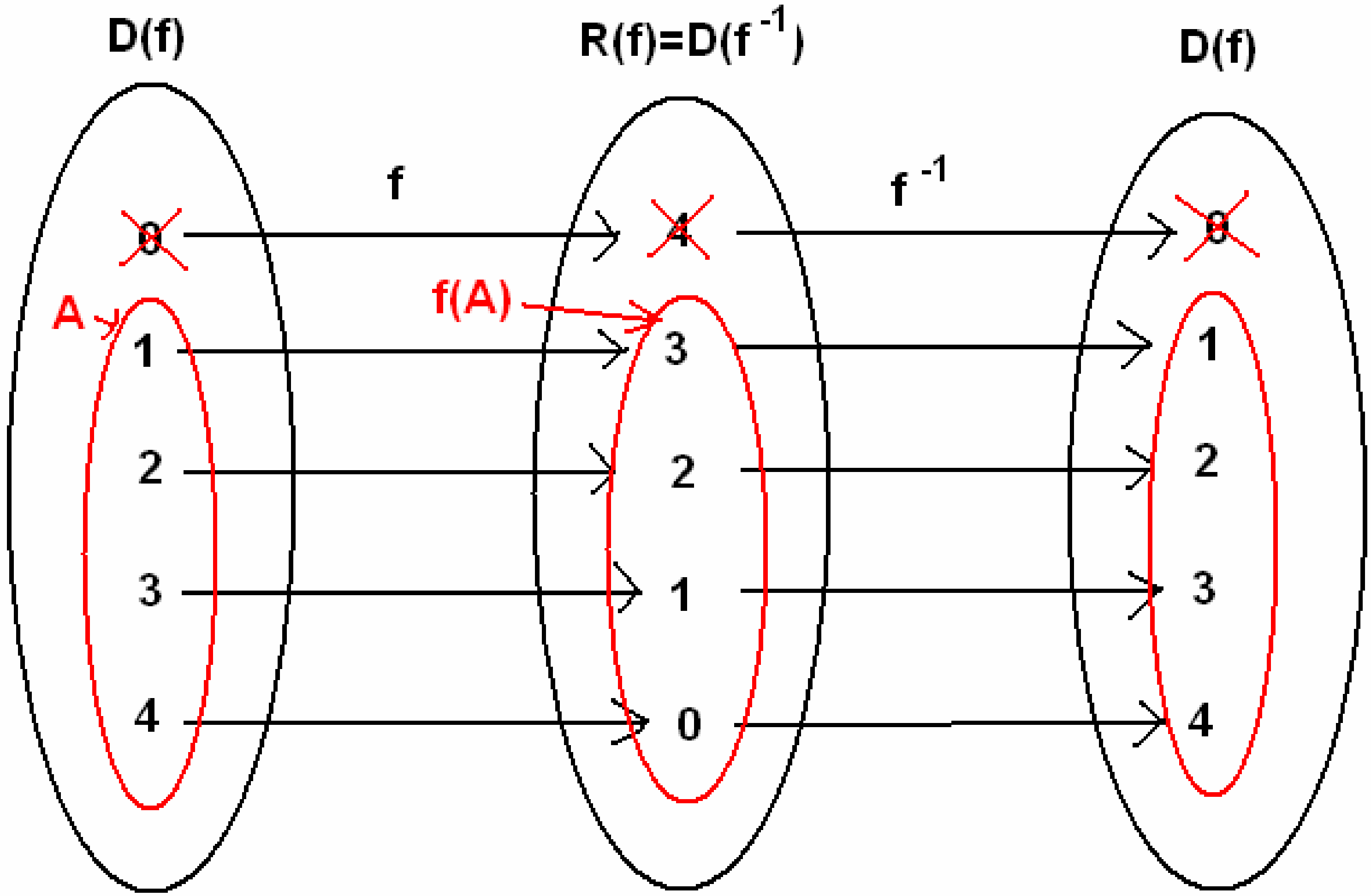
Η δεύτερη συνάρτηση ορίζεται-παράγεται με την βοήθεια της πρώτης και ενός ορισμού, του ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Συνεπώς η δεύτερη συνάρτηση είναι πλήρως συσχετισμένη-εξαρτημένη από την πρώτη.

Προφανώς αν περιορίσω την πρώτη σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της τότε η αντίστροφή της επαναπροσδιορίζεται με βάση τα «νέα δεδομένα» της αρχικής συνάρτησης και του ορισμού της αντίστροφης.


D(f)
R(f)=D(f -1)
D(f)
f
f -1
0
1
2
3
4
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4


D(f)
R(f)=D(f -1)
D(f)
f
f -1
0
1
2
3
4
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4


D(f)
R(f)=D(f -1)
D(f)
f
f -1
A
f(A)
0
1
2
3
4
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Κάθε φορά που περιορίζουμε μια αντιστρέψιμη συνάρτηση f σε ένα υποσύνολο B του πεδίου ορισμού της, τότε η αντίστροφή της επαναπροσδιορίζεται, με βάση τα «νέα δεδομένα» της f και τον ορισμό της αντίστροφης.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα αλλάξει και θα γίνει το σύνολο $f(B)$ ώστε να μπορέσει να κρατήσει τι σύμβολο της αντίστροφης, δηλαδή να μπορεί να γράφεται f^{-1}.

Θυμηθείτε τι ισχύει

$$\left(f_B\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)_{f(B)}$$

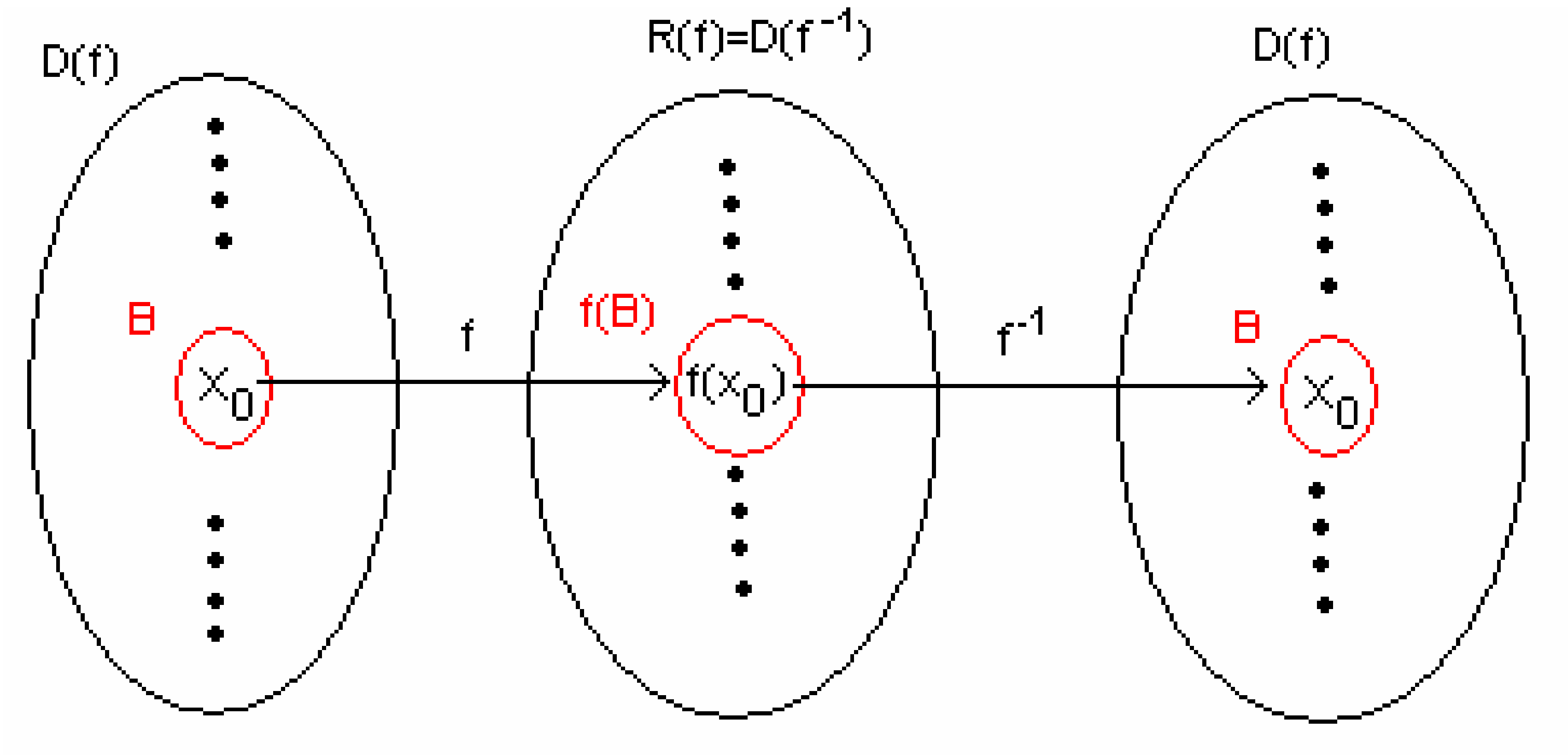
ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΔΥΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

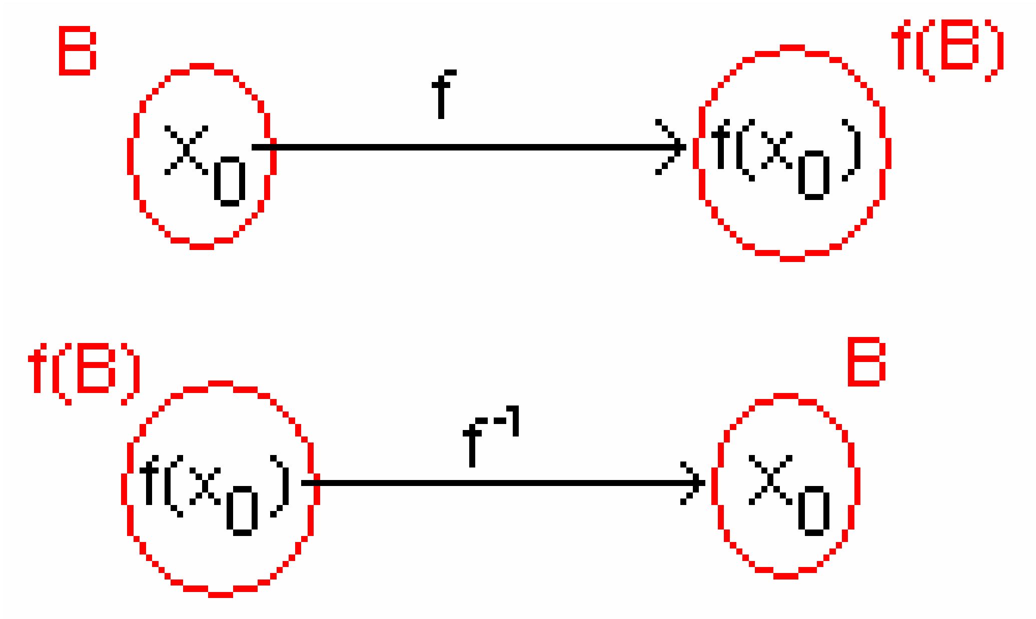
Έστω $f : D(f) \to R$ μία αντιστρέψιμη συνάρτηση για την οποία υποθέτω ότι $D(f) \cap D(f^{-1}) \neq \varnothing$ και (x_0, y_0) ένα σημείο του επιπέδου.
Το σημείο (x_0, y_0) είναι κοινό σημείο των γραφικών των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} αν και μόνο αν ισχύουν συγχρόνως

- $x_0 \in D(f) \cap D(f^{-1})$ και
- Οι περιορισμοί των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο σύνολο $B = \{x_0\}$ είναι ίσες συναρτήσεις με τιμή y_0.

Αν περιορίσω την συνάρτηση f στο σύνολο $B=\{x_0\}$ τότε έχω

- $B=\{x_0\}$ (πεδίο ορισμού της συνάρτησης f)
- $f(B)=\{f(x_0)\}$ υποχρεωτικό πεδίο ορισμού της f^{-1}
- $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0)$
- $f(x_0) \xrightarrow{f^{-1}} x_0$





ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι,

Οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες στο σύνολο $B=\{x_0\}$, **αν και μόνο αν**, $x_0 = f(x_0) = y_0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Είναι δυνατό τα γραφήματα δύο συναρτήσεων να είναι ίσα και οι συναρτήσεις να μην είναι ίσες;

Απάντηση

Προφανώς ΝΑΙ. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η μια συνάρτηση ορίζεται με την βοήθεια της άλλης. Βασικά στις περιπτώσεις αυτές οι δύο συναρτήσεις δεν είναι συγκρίσιμες.

Ας ξεκινήσουμε την μελέτη του ερωτήματος με διάφορα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό γράφημα

$G = \{(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0)\}$.

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο τότε «συμφωνούμε» ότι για τις δύο συναρτήσεις συμβαίνουν συγχρόνως

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)
g	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)

Οι δύο συναρτήσεις f, g όπως ορίστηκαν στον παραπάνω πίνακα είναι ίσες

Ορίζουμε τώρα μόνο την συνάρτηση f σύμφωνα με τον πίνακα

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη που φαίνεται στον επόμενο πίνακα

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)
f^{-1}	(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)

Δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται από την ισοδυναμία

$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, με $x \in D(f)$.

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} ενώ έχουν το ίδιο γράφημα δεν είναι ίσες. Επιπλέον οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το M (2, 2).

Παράδειγμα 2

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό γράφημα το συμμετρικό ως προς το $O(0,\ 0)$ σύνολο $G=\{(-2,\ 1),\ (-1,\ 3),\ (0,\ 0),\ (1,\ -3),\ (2,\ -1)\}$.

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο τότε «συμφωνούμε» ότι για τις δύο συναρτήσεις συμβαίνουν συγχρόνως

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)
g	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)

Οι δύο συναρτήσεις f, g όπως ορίστηκαν στον παραπάνω πίνακα είναι ίσες.

Ορίζουμε τώρα μόνο την συνάρτηση f σύμφωνα με τον πίνακα

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)

Ορίζουμε την συνάρτηση f^* ως εξής (συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων)

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)
f^{-*}	(2, –1)	(1, –3)	(0, 0)	(–1, 3)	(–2, 1)

Δηλαδή η συνάρτηση f^* ορίζεται από την ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^*(-x)=-y, \text{ με } x \in D(f).$$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f, f^* ενώ έχουν το ίδιο γράφημα δεν είναι

ίσες. Επιπλέον οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το O (0, 0).

Παράδειγμα 3

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό γράφημα το συμμετρικό ως προς την ευθεία $y = -x$ σύνολο $G = \{(-3,\ -1),\ (-2,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (1,\ 3)\}$.

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο τότε «συμφωνούμε» ότι για τις δύο συναρτήσεις συμβαίνουν συγχρόνως

x	–3	–2	–1	0	1
f	(–3, –1)	(–2, 0)	(–1, 1)	(0, 2)	(1, 3)
g	(–3, –1)	(–2, 0)	(–1, 1)	(0, 2)	(1, 3)

Οι δύο συναρτήσεις f, g όπως ορίστηκαν στον παραπάνω πίνακα είναι ίσες.

Ορίζουμε τώρα μόνο την συνάρτηση f σύμφωνα με τον πίνακα

x	–3	–2	–1	0	1
f	(–3, –1)	(–2, 0)	(–1, 1)	(0, 2)	(1, 3)

Ορίζουμε την συνάρτηση f^* ως εξής (συμμετρία ως προς την ευθεία $y = -x$)

x	–3	–2	–1	0	1
f	(–3, –1)	(–2, 0)	(–1, 1)	(0, 2)	(1, 3)
f^*	(1, 3)	(0, 2)	(–1, 1)	(–2, 0)	(–3, –1)

Δηλαδή η συνάρτηση f^* ορίζεται από την ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^*(-y) = -x, \text{ με } x \in D(f).$$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f, f^* ενώ έχουν το ίδιο γράφημα δεν είναι ίσες. Επιπλέον οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το M (–1, 1).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα παραπάνω παραδείγματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα

1) Αν δύο συναρτήσεις f, g δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο και έχουν το ίδιο γράφημα τότε οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. **Αυτή την παραδοχή ουσιαστικά κάνουμε κάθε φορά που λέμε «Επειδή οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο γράφημα είναι ίσες»**

2) Αν δύο συναρτήσεις f, f^* συσχετίζονται μεταξύ τους, δηλαδή η f^* ορίζεται με την βοήθεια της συνάρτησης f τότε μπορεί οι δύο συναρτήσεις να έχουν το ίδιο γράφημα και να μην είναι ίσες.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Έστω μια συνάρτηση $f: D(f) \to R$ η οποία είναι αντιστρέψιμη και όχι η ταυτοτική συνάρτηση, με $D(f) \cap D(f^{-1}) = B \neq \varnothing$. Μπορούμε πάντα να περιορίσουμε και τις δύο συναρτήσεις f, f^{-1} σε οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου B ;

Απάντηση

Προφανώς *ΟΧΙ*. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι και οι περιορισμοί πρέπει πάντα να είναι και αυτοί αντίστροφες μεταξύ τους συναρτήσεις. Έτσι αν περιορίσω την συνάρτηση f στο σύνολο A, τότε η f^{-1} περιορίζεται υποχρεωτικά στο σύνολο $f(A)$ και ισχύει $\left(f_A\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)_{f(A)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Αν ρωτήσουμε ένα μικρό παιδί, πόσα είναι τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης $f(x) = -x^3$, με $x \in R$ και της αντίστροφής της, θα δει το σχήμα, και θα μας απαντήσει ότι είναι τρία;

Απάντηση

Λάθος. Το μικρό παιδί δεν γνωρίζει ότι τα σχηματα που βλέπει στο επίπεδο είναι τα γραφήματα των εξισώσεων $y = -x^3$ και $x = -y^3$. Επιπλέον τα «κοινά σημεία» που βλέπει το μικρό παιδί είναι οι τρεις πραγματικές λύσεις του συστήματος $y = -x^3$ και $x = -y^3$, που είναι οι $(-1, 1)$, $(0, 0)$ και $(1, -1)$.

Το μικρό παιδί μπερδεύει τις λύσεις του συστήματος $y = -x^3$ και $x = -y^3$ με τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των αντίστροφων συναρτήσεων

$$f(x) = -x^3, \quad \text{με} \quad x \in R \quad \text{και} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

και αυτό συμβαίνει γιατί το μικρό παιδί, αγνοεί τον τρόπο που ορίστηκε η αντίστροφη συνάρτηση.

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ

ΑΝΔΡΕΑΣ Λ. ΠΕΤΡΑΚΗΣ
e-mail : petrakis@hotmail.com