

mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014**



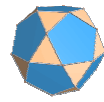
Λύσεις των θεμάτων

**Έκδοση 1<sup>η</sup> (30/05/2014, 13:30)**

Οι απαντήσεις και οι λύσεις  
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς  
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου  
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**  
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica  
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=.....>

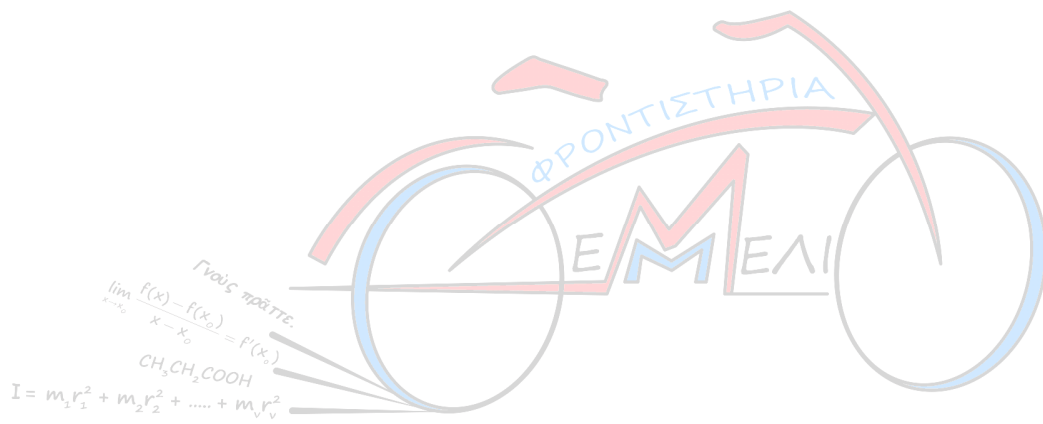
**Συνεργάστηκαν οι:**

*Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,  
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,  
Νίκος Κατσιπής, Στάθης Κούτρας, Χρήστος Κυριαζής,  
Γρηγόρης Κωστάκος, Βαγγέλης Μουρούκος, Ροδόλφος Μπόρης,  
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος,  
Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος  
Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης*



mathematica.gr

Το Δελτίο διατίθεται ελεύθερα  
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**



**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ  
ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Θέμα .1.**

**A1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , για  $x_0 \in (a, \beta)$  και η παράγωγός της  $f'$  διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(a, \beta)$  και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

**β)** Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

δ) Αν  $x_i$  είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τότε η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής  $x_i$

(μονάδες 2)

ε) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  ή τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής.

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

### **ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**A1.** Θεώρημα, σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

**A2.**  $I =$  Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 13

**A3.** Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 59

**A4.**

α) Σ, προκύπτει από τη σελίδα 40

β) Λ, σελίδα 152

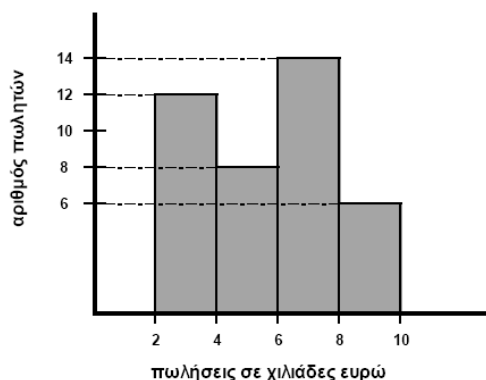
γ) Λ, σελίδα 95

δ) Λ, σελίδα 66

ε) Σ, σελίδα 70

### **Θέμα .2.**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



**B1.** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνοτήτες  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$   
 $CH_2CH_2Cl$   
 $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
[·, ·)			
[·, ·)			
[·, ·)			
[·, ·)			
Σύνολο			

**Μονάδες 8**

**B3. α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

**β)** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

(μονάδες 6)

**Μονάδες 12**

**ΛΥΣΗ**

**B1.** Το πλήθος των πωλητών της εταιρείας είναι  $12 + 8 + 14 + 6 = 40$ .

**B2.**

κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$
[2 , 4)	3	12	0,30
[4 , 6)	5	8	0,20
[6 , 8)	7	14	0,35
[8 , 10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1,00

$$f_1 = \frac{12}{40} = 0,3 \quad , \quad f_2 = \frac{8}{40} = 0,2 \quad , \quad f_3 = \frac{14}{40} = 0,35 \quad , \quad f_4 = \frac{6}{40} = 0,15$$

**B3.**

α)

κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$x_i \cdot v_i$
[2 , 4)	3	12	0,30	36
[4 , 6)	5	8	0,20	40
[6 , 8)	7	14	0,35	98
[8 , 10)	9	6	0,15	54
Σύνολο		40	1,00	228

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

β) Αφού οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες πρέπει να πάρουμε τον αριθμό των πωλητών στις κλάσεις [6 , 8) και [8 , 10) και τα  $\frac{3}{4}$  των πωλητών της κλάσης [4 , 6).

$$\text{Δηλαδή } 6 + 14 + 6 = 26.$$

### Θέμα .3.

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι  $P(K) = x_1$ , ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι  $P(A) = x_2$ , όπου  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(K)$ ,  $P(A)$  και  $P(\Pi)$ , όπου  $P(\Pi)$  η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

**Μονάδες 10**

Γ2. Αν  $P(K) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{1}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω

ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

**Μονάδες 9**

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

**Μονάδες 6**

### ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$

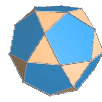
Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left( x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{1}{4} \right)$$

και επειδή  $x_1 < x_2$  θα είναι  $x_1 = \frac{1}{4}$  και  $x_2 = \frac{1}{3}$ ,

συνεπώς  $P(K) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

Αν  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος τότε  $\Omega = K \cup A \cup \Pi$ .



Άρα  $\Pi = (A \cup K)'$  και επειδή τα ενδεχόμενα  $K, A, \Pi$  είναι ασυμβίβαστα ανά δύο,  
είναι

$$P(\Pi) = P((A \cup K)') = 1 - P(A \cup K) = 1 - P(A) - P(K) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Γ2. Είναι  $\Gamma = A \cup K$  άρα από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Εάν η μπάλα που επιλέγεται δεν είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη, είναι υποχρεωτικά πράσινη συνεπώς  $\Delta = \Pi$  οπότε  $P(\Delta) = P(\Pi) = \frac{5}{12}$ .

Τέλος, ισχύει  $E = A \cup \Pi' = A \cup (A \cup K)'$  και επειδή  $A \subseteq A \cup K$  άρα  
 $A \cup (A \cup K)' = A \cup K = \Gamma$

άρα  $E = \Gamma$  οπότε  $P(E) = P(\Gamma) = \frac{7}{12}$

Γ3. Αν  $N(A), N(\Pi), N(\Omega)$  είναι το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων  $A, \Pi$  και του δειγματικού χώρου  $\Omega$  αντίστοιχα τότε σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε  $N(A) = N(\Pi) - 4$ .

Διαιρώντας την τελευταία με  $N(\Omega) \neq 0$  παίρνουμε τελικά

$$P(A) = P(\Pi) - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(\Omega) = 48$$

Άρα το δοχείο περιέχει 48 μπάλες.

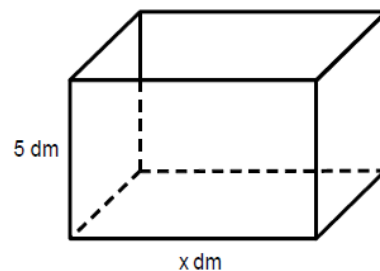
Θέμα .4.



Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και **ανοικτό από πάνω**.

Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.

Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι  $x$  dm με  $0 < x < 10$ .



**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του  $x$  είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

**Μονάδες 8**

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ , όπου  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$  με  $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$ .

**Δ2.** Αν το δείγμα των τετμημένων  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$  των παραπάνω σημείων  $A_i(x_i, y_i)$ ,

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 8$  και
- τυπική απόκλιση  $s$  τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

**α)** να αποδείξετε ότι  $s = 2$

(μονάδες 4)

**β)** να βρείτε τη μέση τιμή των  $x_i^2$ , με  $i = 1, 2, \dots, 15$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$ .  
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B = \{A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 15 \text{ τέτοια ώστε } y_i > -4x_i + 9R + 1\},$$

όπου  $R$  είναι το εύρος των  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$

**Μονάδες 9**

**ΛΥΣΗ**

**Δ1.** Αφού η περίμετρος  $\Pi$  του ορθογωνίου της βάσης είναι **20 dm** άρα, αν  $y$  είναι η άλλη πλευρά του ορθογωνίου της βάσης έχουμε

$$2x + 2y = 20 \text{ δηλαδή } y = 10 - x$$

Συνεπώς επειδή έχουμε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $x, y$ , αφού το κουτί είναι ανοιχτό από πάνω, 2 ορθογώνια διαστάσεων **5** και  $x$  και δύο ορθογώνια διαστάσεων **5** και  $y$ , άρα η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του  $x$  είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= x(10 - x) + 5x + 5x + 5(10 - x) + 5(10 - x) = \\ &= 10x - x^2 + 5x + 5x + 50 - 5x + 50 - 5x = \\ &= -x^2 + 10x + 100 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $E(x)$  είναι παραγωγίσιμη με  $E'(x) = -2x + 10$  και ισχύει  $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ .

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 10 < 0 \Leftrightarrow x > 5$$

συνεπώς η συνάρτηση  $E(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[5, 10)$ .

$x$	0	5	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	○	125	○

$$\text{Επίσης } E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < 5$$

συνεπώς η συνάρτηση  $E(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 5]$ .

Άρα η συνάρτηση  $E(x)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = 5$ .

**Δ2. α)** Είναι  $2s^2 - 5s + 2 = 0 \Leftrightarrow \left( s = 2 \text{ ή } s = \frac{1}{2} \right)$

Αν  $s = \frac{1}{2}$  τότε  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{16} < 0,1$  άρα το δείγμα είναι ομοιογενές οπότε η

τιμή  $s = \frac{1}{2}$  απορρίπτεται.

Αν  $s = 2$  τότε  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{4} > 0,1$  άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές οπότε η

τιμή  $s = 2$  είναι δεκτή. Άρα  $s = 2$

β) Αν συμβολίσουμε με  $\overline{x^2}$  τη μέση τιμή των  $x_i^2$  τότε από το δοσμένο τύπο έχουμε

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \left( \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} \right)^2 \Leftrightarrow 4 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 68.$$

Άρα η ζητούμενη μέση τιμή των  $x_i^2$  είναι  $\overline{x^2} = 68$

Δ3. Η συνάρτηση  $E(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[5,10)$  άρα αφού

$$5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{15} = 9$$

άρα  $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_v r_v^2$

$$125 = E(5) = E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15}) = E(9) = 109$$

συνεπώς το εύρος των τιμών  $R$  είναι  $R = 125 - 109$  δηλαδή  $R = 16$

Όμως

$$E(x_i) = y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 145$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 < 0$$

$$\Leftrightarrow x_i \in (5,9)$$

άρα τα μόνα σημεία  $A_i$  που εξαιρούμε από το δειγματικό χώρο των 15 σημείων είναι τα  $A_1$  και  $A_{15}$ .

Συνεπώς  $B = \{A_2, A_3, \dots, A_{14}\}$  οπότε αν  $N(B), N(\Omega)$  είναι το πλήθος των στοιχείων του  $B$  και το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε

$$N(B) = 13 \text{ και } N(\Omega) = 15 \text{ άρα τελικά } P(B) = \frac{13}{15}.$$

**ΣΧΟΛΙΑ:**
**Εναλλακτικές αποδείξεις**

**B1.** Το πλήθος των πωλητών  $\mathbf{v}$  είναι το άθροισμα των συχνοτήτων  $\mathbf{v}_i$  .

Έτσι έχουμε :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i = 12 + 5 + 14 + 6 = 40$$

**Δ1.** Η συνάρτηση  $\mathbf{E(x)}$  είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με  $\mathbf{\alpha = -1 < 0}$  άρα ως γνωστόν από τη θεωρία του τριωνύμου παρουσιάζει μέγιστο στη θέση

$$\mathbf{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{10}{2 \cdot (-1)} = 5.$$

