Κάποιες πρώτες πρόχειρες λύσεις

A1 σελ. 251

A2 σελ. 273

A3 σελ. 150

A4 Λ-Σ-Σ-Σ-Λ

B1 $z = x + yi$

$2(x^2+y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x-2)i = 0$

$\begin{cases} 2x^2+2y^2-4=0 \iff y^2=1 \iff y=\pm 1 \\ 2x-2=0 \iff x=1 \end{cases}$

$z = 1 \pm i$

B2 $w = 3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^3 = -3i$

B3 $|u-3i| = |4(1+i) - 1 + i - i| =$

$= |4+4i-1| = |3+4i| = 5$

$K(0,3) \quad \rho = 5$

Γ1 $h(x)=x-\ln(e^x+1)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$, h ↗ R

$h''(x)=\dots=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}<0$, h ∩ R

Γ2 $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}$

$\Leftrightarrow h(2h'(x))<\frac{e}{e+1}=h(1)$ $\quad$ (h ↗)

$\Leftrightarrow 2h'(x)<1 \Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x+1>2 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Γ3 * $\lim\limits_{+\infty} h(x)=\lim\limits_{+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\dots=\ln 1=0$

Θέτω $\frac{e^x}{e^x+1}=y$, $\lim\limits_{+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$

$y=0$ οριζόντια

⊛ $h(x)-x=-\ln(e^x+1)$

$\lim\limits_{-\infty}(h(x)-x)=\lim\limits_{-\infty}\left[-\ln(e^x+1)\right]=0$

στο $-\infty$ πλάγια η $y=x$

Γ4 $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)=e^x\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2\right)=$

$=e^x(h(x)-h(0))$ $\quad$ γιατί $h(0)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

προφανής η $x=0$ $\quad \varphi(0)=0$

$x>0 \quad h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)-h(0)>0$ $\Bigg\}$ $\varphi(x)\geq 0$

$E=\int_0^1|\varphi(x)|dx=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 e^x(x-\ln(e^x+1)+\ln 2)dx=$

$=\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)dx+\int_0^1 \ln 2\, dx=$

$=\dots=(e+1)\left(\ln\frac{2}{e+1}\right)+e$

Δ1 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{0}\frac{e^x}{1} = e^0 = 1$

⊛ $x\neq 0$ $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \dots = \frac{xe^x-e^x+1}{x} > 0$ για $x\neq 0$ ⊛

$x=0$ $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \dots = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x-e^x+1}{x}, & x\neq 0 \\ 1/2, & x=0 \end{cases}$$

$f'(x)>0$ στο $\mathbb{R}$

$f \nearrow \mathbb{R}$

⊛ Έστω $g(x) = xe^x - e^x + 1$

$g'(x) = \dots = xe^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

$g(x) \geq g(0)$

$g(x) \geq 0$

Δ2 ($f' \nearrow$)

α) για $x=0$ $\int_1^{2f'(0)} f(u)\,du = \int_1^1 f(u)\,du = 0$!!!

για $x>0$ $\left.\begin{matrix} f(x)>1 \\ f'(x)>\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $I = \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du > 0$

$x<0$ .... $I<0$

Οπότε μοναδική λύση η $x=0$

Δ2

β) $y(t) = \frac{e^{x(t)}-1}{x(t)} \Leftrightarrow y(t)x(t) = e^{x(t)}-1$

$y'(t_0)x(t_0) + y(t_0)x'(t_0) = x'(t_0)e^{x(t_0)}$ (ισχύει $y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2}$)

$\frac{\cancel{x'(t_0)}}{2}x(t_0) + y(t_0)\cancel{x'(t_0)} = \cancel{x'(t_0)}e^{x(t_0)}$

$x^2(t_0) + 2e^{x(t_0)} - 2 = 2x(t_0)e^{x(t_0)}$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(x(t_0)) \Leftrightarrow f'(x(t_0)) = f'(0)$

$\overset{}{\underset{f'\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{x(t_0) = 0}$

και το ζητούμενο σημείο $A(0,1)$.

(43) $g(x) = (xf(x)+1-e)^2(x-2)^2 \quad , x>0$

$g(x) = \cdots = (e^x-e)^2(x-2)^2$

$g'(x) = 2(x-2)(e^x-e)\left[xe^x - e^x - e\right]$

$\downarrow$ 2 $\quad\downarrow$ 1

$\phi(x) = xe^x - e^x - e$

$\phi'(x) = xe^x > 0 \ , \ x>0$

$\phi \nearrow [0,+\infty)$

Θ. Bolzano για ϕ στο $[1,2]$

i) ϕ συνεχής $[1,2]$

ii) $\phi(1) = -e < 0$

$\phi(2) = e^2 - e > 0$

υπάρχει $\xi \in (1,2)$ μοναδικό

$\phi(\xi) = 0$

x	0		1		ξ		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-e		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\phi(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		1		ξ		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		