ΘΕΜΑ Α

Α1) Σχολικό σελ. 260

Α2) Σχολικό σελ. 280

Α3) Σ – Σ – Λ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow$

$|z-3i|+|\overline{\bar{z}+3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2$

$\Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1.$

Άρα κύκλος $K(0,3)$ κ $\rho=1$.

Αν $z=x+yi$ $\quad C: x^2+(y-3)^2=1$

Β2) $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

με $z-3i\neq 0$

Β3) $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \xlongequal{\text{από Β2}} \dfrac{1}{\bar{z}+3i}+\dfrac{1}{z-3i}=$

$=\bar{u}+u\in\mathbb{R}$ ως άθροισμα 2 συζυγών

όπου $u=\dfrac{1}{z-3i}$ κ $|u|=\dfrac{1}{|z-3i|}=\dfrac{1}{1}=1.$

Τώρα $|w|=|\bar{u}+u|\leq|\bar{u}|+|u|$

$|w|\leq 2$ κ αφού $w\in\mathbb{R}$

$-2\leq w\leq 2$

Β4) Έχουμε $u=\dfrac{1}{z-3i}=\dfrac{1}{x+(y-3)i}=\dfrac{x-(y-3)i}{x^2+(y-3)^2}=$

$=\dfrac{x-(y-3)i}{1}=x-(y-3)i$

κ ισχύει $w=u+\bar{u}=2x$

κ τώρα $|z-w|=|x+yi-2x|=|-x+yi|=|x-yi|=$

$=\sqrt{x^2+y^2}=|z|.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$

$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=(x)'f'(x)+xf''(x)$

$\left[e^x f'(x)-e^x\right]'=\left[xf'(x)\right]' \quad \forall x\in R$

$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c_1$ η για $x=0$ το $c_1=-1$

$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1$

$f'(x)(e^x-x)=e^x-1$

$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\left(\ln(e^x-x)\right)'$ το $e^x-x>0 \quad \forall x\in R$

$f(x)=\ln(e^x-x)+c$ η για $x=0$ το $c=0$

$$\boxed{f(x)=\ln(e^x-x)}$$

Γ2) $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Ο.Ε

$f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

Γ3) $f''(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$ η θεωρώ $g(x)=2e^x-xe^x-$

www.stoxos.edu.gr

$g'(x)=e^x(1-x)$

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
f''	$-$	0 $+$	0	$-$
f	$\cap$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ Σ.Κ.

x	$-\infty$	ρ_1	1	ρ_2 $+\infty$
g'	$+$		0	$-$
g	↗			↘

-1 $e-1$ $-\infty$

Άρα η $g(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\rho_1\in(-\infty,1)$ η $\rho_2\in(1,+\infty)$

★ $x>\rho_2 \Leftrightarrow g(x)<g(\rho_2) \Leftrightarrow g(x)<0$

$x<\rho_1 \Leftrightarrow g(x)<g(\rho_1) \Leftrightarrow g(x)<0$

$\left.\begin{array}{l}\rho_1<x<1\\ 1<x<\rho_2\end{array}\right\}$ $g(x)>0$

Γ4) Θεωρώ $h(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η $h(x) = 0$ το <u>ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΛΥΣΗ</u> στο $(0, \frac{\pi}{2})$

x	0		$\pi/2$
h'		$+$	
h		$\nearrow$	
	-1		θετική

$h(\frac{\pi}{2}) = \ln(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}) - 0 > 0$

διότι $h(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) > 0$

Άρα Θ.Bolzano η στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

η έχουμε <u>ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 1</u> ΛΥΣΗ στο $(0, \frac{\pi}{2})$

ΤΕΛΙΚΑ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΛΥΣΗ στο $(0, \frac{\pi}{2})$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $1-f(x)=e^{2x}\cdot\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

$\Leftrightarrow f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=1-e^{2x}\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du$

☆ Θέτουμε

$x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$

$dt=dt$

t	0	$-x$
u	x	0

$\Leftrightarrow f(x)=1-\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du}$

Ομοίως $g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$

η $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=e^{2x}$

$g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x)=e^{2x}$ $\Big\}$ (*)

(*) $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{\text{δια}}{\underset{g^2(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c \Leftrightarrow f(x)=c\,g(x)$ η $f(0)=g(0)=1$

άρα $c=1$

Τελικά $\boxed{f(x)=g(x)}$

Δ2)

$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}=\frac{e^{2x}}{\frac{e^{2x}}{f(x)}}=f(x) \Leftrightarrow f'(x)=f(x)$

(*) $\boxed{f(x)g(x)=e^{2x}}$

$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}f'(x)-e^{x}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x \underset{c=1}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x)=e^x}$

Δ3) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{1/x}}\overset{0\cdot(\infty)}{=}$$

$$=\lim_{0^-}\frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{0^-}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{0^-}\left(-e^{-1/x}\right)=-e^{-(-\infty)}=-\infty.$$

Δ4) $$F(x)=\int_1^x f(-t^2)\,dt=\int_1^x e^{t^2}dt<0 \qquad x\in(0,1)$$

αφου $x<1$ κ $e^{t^2}>0$

κ $F'(x)=e^{x^2}$.

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=$$

$$=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 x\,e^{x^2}dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=$$

$$=-\left[xF(x)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=$$

$$=-\left(1\cancel{F(1)}-0F(0)\right)+\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=\frac{1}{2}(e-1)\ \tau.\mu.$$