

## Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2010

**ΘΕΜΑ Α**

Α.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 304.

Α.2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 279.

Α.3 Σχολικό Βιβλίο σελ. 273.

Α.4. α. → Σ     β. → Σ     γ. → Λ     δ. → Λ     ε. → Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**B.1.**  $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ ,  $\Delta = 4 - 8 = -4$ ,  $z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$ .

**B.2.**

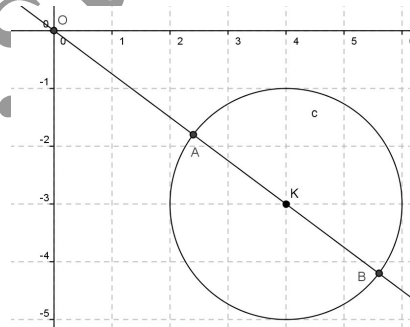
$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1+i)^{2010} + (1-i)^{2010} = ((1+i)^2)^{1005} + ((1-i)^2)^{1005} = (2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = 0.$$

**B.3.**

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z - 4 + 3i| = |(1+i) - (1-i)| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = |2i| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |w - (4 - 3i)| = 2.$$

Είναι κύκλος  $K(4, -3)$  και  $\rho = 2$ **B.4.****α' τρόπος:**  $|w|_{\max} = (OB) = (OK) + R = 5 + 2 = 7$ ,  $|w|_{\min} = (OA) = (OK) - R = 5 - 2 = 3$ , και ισχύει

$$(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (-3)^2} = 5. \quad \text{Άρα } 3 \leq |w| \leq 7.$$



**β' τρόπος:**  $|w| = |(w - 4 + 3i) + (4 - 3i)|$

Είναι  $\left| |w - 4 + 3i| - |4 - 3i| \right| \leq |w| \leq |w - 4 + 3i| + |4 - 3i| \Leftrightarrow |2 - 5| \leq |w| \leq |2 + 5| \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ.1.**  $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} > 0$  διότι  $2x^2+2x+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  αφού  $\Delta = -12 < 0$ . Άρα  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ.2.**  $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1} \right] \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = \ln[(3x-2)^2+1] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4+1) = 6x - 4 + \ln[(3x-2)^2+1] \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln[(3x-2)^2+1] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2)$   
 $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$  άρα  $x = 1$  ή  $x = 2$  και αφού  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  θα είναι και "1-1".

**Γ.3.**  $f''(x) = \frac{(4x+2)(x^2+1) - 2x(2x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$  και  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''$	-	0	+	0
$f$	↖		↗	
		Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο  $[-1, 1]$  και κοίλη στα διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$ . Έχει σημεία καμπής τα  $A(1, 2+\ln 2)$  και  $B(-1, -2+\ln 2)$ .

Εφαπτομένη στο  $A$ :  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$  ή  $y - (2 + \ln 2) = 3(x - 1)$  ή  $y = 3x - 1 + \ln 2$

στο  $B$ :  $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$  ή  $y - (-2 + \ln 2) = 1 \cdot (x + 1)$  ή  $y = x - 1 + \ln 2$

Και από το σύστημα  $\begin{cases} y = 3x - 1 + \ln 2 \\ y = x - 1 + \ln 2 \end{cases}$  προκύπτει σημείο τομής  $K(0, -1 + \ln 2)$  που ανήκει στον  $y' y$ .

**Γ.4.**

α' τρόπος:

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 x(2x + \ln(x^2+1)) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 + x \ln(x^2+1)) dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2+1) dx = *$$

$$= \int_{-1}^1 2x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2+1)' \ln(x^2+1) dx = \left( \frac{2x^3}{3} \right)_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left\{ [(x^2+1) \ln(x^2+1)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} dx \right\} = \dots = \frac{4}{3}$$

β' τρόπος:

$$* = \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2+1)' \ln(x^2+1) dx = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [(x^2+1)' \ln(x^2+1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2+1) \cdot [\ln(x^2+1)]' dx =$$

$$= \frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2+1) \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 x dx = \frac{4}{3} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}$$

γ' τρόπος:

$$* = \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2)' \ln(x^2+1) dx = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [x^2 \cdot \ln(x^2+1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot [\ln(x^2+1)]' dx = \frac{4}{3} + 0 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1} dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \left( x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 x dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{4}{3} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_{-1}^1 = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}$$



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ.1.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $g_1, g_2$  με  $g_1(x) = \frac{x}{f(x)-x}$  και  $g_2(x) = \int_0^x g_1(t)dt$ . Η  $g_1$  είναι συνεχής

στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις συνεχών. Άρα η  $g_2$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $g_2'(x) = g_1(x) = \frac{x}{f(x)-x}$ .

Η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x + 3 + g_2(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα

παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f'(x) = [x + 3 + g_2(x)]' = 1 + g_2'(x) = 1 + \frac{x}{f(x)-x} = \frac{f(x)-x+x}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ .

**Δ.2.**  $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2f'(x)(f(x)-x) - 2f(x) = 2 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-x} (f(x)-x) - 2f(x) = 0$

Αφού  $g'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  τότε η  $g(x) = c$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ.3.**  $g(x) = f^2(x) - 2xf(x) = c$  και  $g(0) = f^2(0) - 0 = 3^2 = 9$

Άρα  $f^2(x) - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9$  και θέτουμε

$h(x) = f(x) - x$  που είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $[h(x)]^2 > 0$ , άρα  $h(x) \neq 0$  και λόγω συνέχειας θα διατηρεί πρόσημο, και αφού  $h(0) = 3 > 0$  τότε  $h(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Τελικά  $[h(x)]^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ή  $h(x) = -\sqrt{x^2 + 9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  όμως δεκτή μόνο

η  $h(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , όποτε  $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$ .

**Δ.4.** Έστω  $G$  μια αρχική της  $f$ . Τότε η ζητούμενη ανισότητα γίνεται

$G(x+1) - G(x) < G(x+2) - G(x+1)$ . Για τη  $G(u) = \int_a^u f(t)dt$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα

$[x, x+1], [x+1, x+2]$  όποτε υπάρχουν  $\xi_1 \in (x, x+1)$  με  $G'(\xi_1) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1-x} = G(x+1) - G(x)$  και

$\xi_2 \in (x+1, x+2)$  με  $G'(\xi_2) = \frac{G(x+2) - G(x+1)}{(x+2) - (x+1)} = G(x+2) - G(x+1)$ . Όποτε αρκεί να δείξουμε ότι

$G'(\xi_1) < G'(\xi_2)$  δηλαδή ότι η  $G'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Έχουμε  $G'(x) = f(x)$  &  $G''(x) = f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} > 0$ , άρα η  $G'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

(αφού  $\sqrt{x^2+9} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ )

ή με άλλον τρόπο  $\sqrt{x^2+9} > -x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } x \geq 0 \text{ ισχύει } \forall x \geq 0 \\ \text{αν } x < 0, \sqrt{x^2+9} > (-x)^2 \Leftrightarrow 9 > 0, \text{ που ισχύει.} \end{cases}$

*Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας*