

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Σχολικό βιβλίο σελίδα 194 (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

**A.2** Η ευθεία  $y=\lambda x+\beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

**B.** α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ στ. Σ

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α.**  $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

**β.** Έστω  $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ . Τότε  $\bar{w} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} + \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = w$

Ισχύει λοιπόν  $w = \bar{w} \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \text{Im}(w) \cdot i = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(w) = 0$  και συνεπώς ο  $w \in \mathbb{R}$ .

**γ.**  $|z_1 + z_2 + z_3| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{\bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_3 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \right| =$   
 $= 9 \frac{|z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = 9 \frac{|z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$

**ΘΕΜΑ 3ο**

**α.**  $f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$ , αφού  $\lambda > 0$  οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της  $C_f$  και της εφαπτομένης. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda \cdot e^{\lambda x_0} (x - x_0)$  (1) και αφού διέρχεται από το  $O(0,0)$  έχουμε:  $-e^{\lambda x_0} = \lambda \cdot e^{\lambda x_0} (-x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda \cdot e^{\lambda x_0} \cdot x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$  (2)

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: (1),(2)  $\Leftrightarrow y - e = \lambda \cdot e \left( x - \frac{1}{\lambda} \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - e = \lambda e x - e \Leftrightarrow y = \lambda e x$  και το σημείο επαφής  $M(x_0, e^{\lambda x_0}) = M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:  $E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(x) - \lambda e^x| dx$

Είναι όμως  $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} > 0$  δηλαδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  οπότε η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη. Ισχύει λοιπόν  $f(x) \geq \lambda e^x \Leftrightarrow f(x) - \lambda e^x \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } E(\lambda) &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(x) - \lambda e^x| dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda e^x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e^x) dx = \left[ \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \lambda e^x \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \\ &= \frac{e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}}{\lambda} - \lambda e^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e^0}{\lambda} = \frac{e}{\lambda} - \lambda e^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e}{\lambda} - \lambda e^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e - e - 2}{2\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda} \end{aligned}$$

δ. Είναι:  $\frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{\lambda \frac{e-2}{2}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{e-2}{2} \cdot \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda}$

Γνωρίζουμε ότι:  $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \eta\mu\lambda} \leq 1 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\lambda}{3} \leq \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} \leq \lambda$

Ισχύει:  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{3} = +\infty$  και  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda = +\infty$ , οπότε από το κριτήριο παρεμβολής και

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty. \text{ Επίσης είναι } \frac{e-2}{2} > 0, \text{ οπότε τελικά } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{e-2}{2} \cdot \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} \right) = +\infty$$

#### ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι:  $2 \cdot f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2 \cdot f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left( \frac{e^x}{2} \right)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c. \text{ Για } x=0: e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Τελικά } e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln \left( \frac{1 + e^x}{2} \right) \Leftrightarrow f(x) = \ln \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)$$

β. Για το  $\int_0^x f(x-t) dt$  θέτουμε  $u = x-t$ , οπότε  $du = -dt \Leftrightarrow dt = -du$ . Για  $t=0 \Rightarrow u=x$  και

$$\text{για } t=x \Rightarrow u=0, \text{ οπότε: } \int_0^x f(x-t) dt = -\int_x^0 f(u) du = \int_0^x f(u) du$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $0 \in \mathbb{R}$  επομένως η  $\int_0^x f(u) du$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x} \stackrel{\left( \frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x f(u) du \right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = 0$$

γ. Έστω  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Για την  $h(x)$  έχουμε:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \int_{-x}^{\alpha} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_{\alpha}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = -\int_{\alpha}^{-x} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_{\alpha}^x t^{2005} \cdot f(t) dt$$

Η  $w(t) = t^{2005} \cdot f(t)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα οι  $\int_{\alpha}^{-x} t^{2005} \cdot f(t) dt$  και  $\int_{\alpha}^x t^{2005} \cdot f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  οπότε:

$$h'(x) = -(-x)^{2005} \cdot f(-x) \cdot (-x)' + x^{2005} \cdot f(x) = -x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) + x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) =$$

$$= x^{2005} \left[ \ln\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \right] = x^{2005} \left[ \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \right] =$$

$$= x^{2005} \left[ \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \right] = x^{2005} \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1} \cdot \frac{1+e^x}{2}\right) = x^{2005} \ln e^x = x^{2006}$$

$$\text{Για την } g(x) \text{ έχουμε: } g'(x) = \left(\frac{x^{2007}}{2007}\right)' = \frac{2007 \cdot x^{2006}}{2007} = x^{2006}$$

Άρα  $h'(x) = g'(x)$ , οπότε  $h(x) = g(x) + c$ . Για  $x=0$  έχουμε:  $h(0) = g(0) + c \Leftrightarrow c = 0$

Και τελικά  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ. Από το (γ) ερώτημα έχουμε:  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2008 \cdot x^{2007} = 2007 \Leftrightarrow 2008 \cdot x^{2007} - 2007 = 0$$

Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = 2008 \cdot x^{2007} - 2007$ ,  $x \in [0, 1]$ .

- Η  $\varphi(x)$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και
- $\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = -2007 \\ \varphi(1) = 2008 - 2007 = 1 \end{array} \right\} \varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $\varphi(x)=0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

Όμως  $\varphi'(x) = 2008 \cdot 2007 \cdot x^{2006} > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$  συνεπώς η  $\varphi(x)$  είναι γν. αύξουσα

Άρα τελικά η εξίσωση  $\varphi(x)=0$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .