

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

- A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 260, Θεώρημα Fermat  
 B. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 213, Ορισμός  
 Γ. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

### ΘΕΜΑ 2ο

- α. Για το πεδίο ορισμού της  $f$  έχουμε  $x \geq 0$ , οπότε:  $A = (0, +\infty)$   
 Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Οπότε υπολογίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  κατασκευάζοντας τον πίνακα:

$x$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			

γιατί:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ 2 \ln x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x > -\frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ , γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$   
 και παρουσιάζει ελάχιστο στο  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  ίσο με  $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$

- β. Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f''(x) = (2x \ln x + x)' = 2 \ln x + 2x \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Οπότε υπολογίζουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της  $f$  κατασκευάζοντας τον πίνακα:

$x$	$0$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			

γιατί:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$

Η  $f$  είναι κοίλη στο  $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ , κυρτή στο  $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$  και έχει σημείο καμπής στο  $e^{-\frac{3}{2}}$  ίσο με  $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} = e^{-3} \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$

γ. Επειδή η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  είναι:

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2e} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ . Οπότε αφού η  $f$  είναι συνεχής στο

$$(0, +\infty) \text{ το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι: } f(A) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

### ΘΕΜΑ 3ο

α. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση  $g$  στο  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  :

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  ως παραγωγίσιμη.
- Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων.

$$\bullet \begin{cases} g(0) = e^0 \cdot f(0) = 1 \cdot 0 = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \text{άρα } g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\text{και αφού } g'(x) = (e^x f(x))' = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$$

οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστο  $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$  τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$$

$$\begin{aligned} \beta. I(\alpha) &= \int_\alpha^0 g(x) dx = \int_\alpha^0 e^x f(x) dx = \int_\alpha^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = \int_\alpha^0 (e^x)' (2x^2 - 3x) dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x (4x - 3) dx = -e^\alpha (2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_\alpha^0 (e^x)' (4x - 3) dx = \\ &= -e^\alpha (2\alpha^2 - 3\alpha) - [e^x (4x - 3)]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 4e^x dx = -e^\alpha (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3e^0 + e^\alpha (4\alpha - 3) + 4[e^x]_\alpha^0 = \\ &= e^\alpha (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3) + 3 + 4(1 - e^\alpha) = e^\alpha (-2\alpha^2 + 7\alpha - 3) + 3 + 4 - 4e^\alpha = \\ &= e^\alpha (-2\alpha^2 + 7\alpha - 3 - 4) + 7 = e^\alpha (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} l(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7] \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} + 7 \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} + 7 \stackrel{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} + 7 = 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

#### ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή  $|z|f(t)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $1 \in \mathbb{R}$  τότε η  $\int_1^{x^3} |z|f(t)dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = |z|f(x^3) \cdot 3x^2 - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$ .

β. Παρατηρούμε ότι  $g(1)=0$  άρα  $g(x) \geq g(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , δηλαδή η  $g$  παρουσιάζει στο  $x=1$  ελάχιστο. Και επειδή η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=1$  σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα πρέπει:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow |z|f(1) \cdot 3 - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \stackrel{f(1)=1}{=} 0 \Leftrightarrow 3|z| - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| = 0 \Leftrightarrow |z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$$

γ. Για  $z = \alpha + \beta i$  έχουμε:  $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$ , οπότε  $\operatorname{Re}(z^2) = \alpha^2 - \beta^2$   
Από το (β) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned} |z| = \left|z + \frac{1}{z}\right| &\Leftrightarrow |z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = \left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2 + \bar{z}^2 + 1}{z \cdot \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta i)^2 + (\alpha - \beta i)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta i + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha^2 - \beta^2) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

δ. Από το (γ) ερώτημα έχουμε:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} < 0 \text{ άρα } (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0 \stackrel{\alpha - \beta > 0}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha,$$

οπότε  $\beta < 0$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[2,3]$  ως παραγωγίσιμη με  $f(2) \cdot f(3) = \alpha\beta < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (2,3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .