

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Θεωρία σελ. 214

A2. Θεωρία σελ. 217

B1. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό

B2. $\alpha \rightarrow 3$, $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow 5$, $\delta \rightarrow 2$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Ο w_1 είναι: $w_1 = f(9-5i) = \frac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \frac{18-9i}{9+3i} = \frac{3(6-3i)}{3(3+i)} = \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{15-15i}{10} =$
 $= \frac{3}{2}(1-i) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{4} + i\eta\mu \frac{7\pi}{4} \right).$

Ο w_2 είναι: $w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004} \stackrel{(\alpha)}{=} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{4} + i\eta\mu \frac{7\pi}{4} \right) \right]^{2004} =$
 $= \left(\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{4} + i\eta\mu \frac{7\pi}{4} \right)^{2004} = \sigma\upsilon\nu \frac{2004 \cdot 7\pi}{4} + i\eta\mu \frac{2004 \cdot 7\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu(3507\pi) + i\eta\mu(3507\pi) =$
 $= \sigma\upsilon\nu(3506\pi + \pi) + i\eta\mu(3506\pi + \pi) = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$

β) Το $|w_1|$ από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, οπότε ο πίνακας M είναι:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση είναι το Β

γ) Ο πίνακας M του ερωτήματος (β) είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, έτσι $|M| = -1 \neq 0$, οπότε ο

M αντιστρέφεται με: $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας K που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$ είναι:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} & -\eta\mu \frac{\pi}{2} \\ \eta\mu \frac{\pi}{2} & \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση $MX=K$ έχει ως μοναδική λύση της τον πίνακα:

$$X = M^{-1} \cdot K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=3$. Πράγματι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως παραγωγίσιμη σ' αυτό και αφού $f(0)=2 < 3 < 4=f(1)$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έπεται ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=3$. Επίσης, η συνεχής f στο $[0,1]$ έχει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, συνεπώς ο x_0 είναι μοναδικός.

β) Έχουμε $0 < \frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, ισχύουν οι ανισότητες :

$$f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1), \quad f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1), \quad f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1), \quad f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1) \quad \text{και}$$

αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, έχουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$), έτσι από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f'(x_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_2) = \frac{4-2}{1} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

ΘΕΜΑ 4ο

$$\text{Έχουμε } f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2} \Leftrightarrow f(t) = \frac{at}{1 + \frac{t^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow f(t) = \frac{at}{\frac{\beta^2 + t^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow f(t) = \frac{a\beta^2 t}{\beta^2 + t^2}, \quad t \geq 0$$

με a και β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί .

α. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(t) = \frac{\alpha\beta^2(\beta^2 + t^2) - \alpha\beta^2 2t}{(\beta^2 + t^2)^2} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{\alpha\beta^2(\beta^2 + t^2 - 2t^2)}{(\beta^2 + t^2)^2} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{\alpha\beta^2(\beta^2 - t^2)}{(\beta^2 + t^2)^2}$$

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$, παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστη τιμή της f) στο εσωτερικό σημείο, $t_0 = 6$ του $[0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, συνεπώς από το Θεώρημα Fermat έπεται ότι :

$$f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2(\beta^2 - 6^2)}{(\beta^2 + 6^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta^2(\beta^2 - 6^2) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 6^2 \stackrel{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \beta = 6 .$$

Από την υπόθεση η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, οπότε

$$f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2 6}{\beta^2 + 6^2} = 15 \stackrel{\beta=6}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha 6^2 6}{6^2 + 6^2} = 15 \Leftrightarrow \frac{\alpha 6^2 6}{2 \cdot 6^2} = 15 \Leftrightarrow 3\alpha = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

β. Για $\alpha=5$ και $\beta=6$ η $f(t)$ γίνεται : $f(t) = \frac{180t}{36+t^2}$, $t \geq 0$.

Για να είναι η τιμή της συγκέντρωσης τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, θα πρέπει :

$$f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36+t^2} \geq 12 \Leftrightarrow 12(36+t^2) \leq 180t \Leftrightarrow 36+t^2 \leq 12t \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$, δηλαδή το φάρμακο δρα αποτελεσματικά στο χρονικό διάστημα $[3, 12]$.