Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2013

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ.334-335
Α.2. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 246
Α.3 Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 222
Α.4. α. $\to$ **Λ** **β.** $\to$ **Σ** **γ.** $\to$ **Σ** **δ.** $\to$ **Λ** **ε.** $\to$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0.$

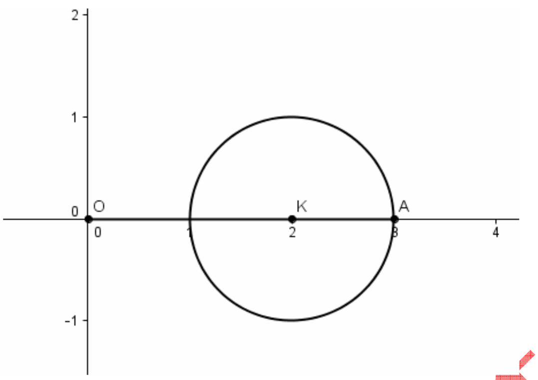
Αν $|z-2| = y$ είναι $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -2$.

Όμως $y = |z-2| \geq 0$ άρα $|z-2| = 1$.

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

$1^{ος}$ τρόπος: $|z| = |(z-2)+2| \leq |z-2| + |2| = 1+2 = 3.$

$2^{ος}$ τρόπος: Γεωμετρικά από το σχήμα βλέπουμε ότι $|z|_{max} = (OA) = 3$, άρα $|z| \leq 3$.



Β.2.

$1^{ος}$ τρόπος:

Αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ θα είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα της μορφής $z_1 = x + yi$ και $z_2 = x - yi$ και από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2yi| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$

Από την εξίσωση του γ.τ. : $(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, οπότε $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta , έχουμε

$S = z_1 + z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1) = -\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -4,$

$P = z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = 5 \Leftrightarrow \gamma = 5.$

$2^{ος}$ τρόπος:

Είναι $z_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{-\Delta}\cdot i}{2}$ και $z_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{-\Delta}\cdot i}{2}$, οπότε

$$|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή z_1 ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 είναι:

$$\left(-\frac{\beta}{2}-2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{2}\right)^2=1\Leftrightarrow\left(\frac{\beta}{2}+2\right)^2+\frac{4\gamma-\beta^2}{2}=1\Leftrightarrow\Leftrightarrow\frac{\beta^2}{4}+2\beta+4+\gamma-\frac{\beta^2}{4}=1\Leftrightarrow 2\beta+\gamma=-3,\ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta=-4$ και $\gamma=5$.

Β.3.

1ος τρόπος:

Έστω $|\nu|\geq 4$. Έχουμε $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0\Leftrightarrow\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0$.

Άρα $|\nu|^3=|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0|=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\leq|\alpha_2\nu^2|+|\alpha_1\nu|+|\alpha_0|=$

$=|\alpha_2|\cdot|\nu^2|+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|$.

Από B_1 είναι $|\alpha_0|\leq 3,\ |\alpha_1|\leq 3,\ |\alpha_2|\leq 3$, άρα $|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\leq 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$.

Η τελευταία γράφεται $|\nu|^3\leq 3\dfrac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1}$ (είναι $|\nu|-1>0$ αφού $|\nu|\geq 4$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\nu|^3(|\nu|-1)\leq 3\left(|\nu|^3-1\right)\Leftrightarrow|\nu|^4\leq 4|\nu|^3-3$.

Όμως $4\cdot|\nu|^3-3\leq 4\cdot|\nu|^3$ άρα $|\nu|^4\leq 4\cdot|\nu|^3\Leftrightarrow|\nu|<4$ που είναι άτοπο. Άρα $|\nu|<4$.

2ος τρόπος:

Έχουμε $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0\Leftrightarrow\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0$.

Άρα $|\nu|^3=|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0|=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\leq|\alpha_2\nu^2|+|\alpha_1\nu|+|\alpha_0|=$

$=|\alpha_2|\cdot|\nu^2|+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|$.

Από B_1 είναι $|\alpha_0|\leq 3,\ |\alpha_1|\leq 3,\ |\alpha_2|\leq 3$, άρα $|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\leq 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$.

Άρα $|\nu|^3\leq 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)\Leftrightarrow|\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3\leq 0<1$

Τότε: $|\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3<1\Leftrightarrow|\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-4<0\Leftrightarrow(|\nu|-4)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)<0\Leftrightarrow|\nu|<4$

διότι $|\nu|^2+|\nu|+1>0$

3ος τρόπος: *(η λύση διαμορφώθηκε από εμάς και το Νίκο Ζανταρίδη πάνω σε ιδέα μιάς μαθήτριας του)*

Ομοίως με τα παραπάνω , έστω $|\nu|\geq 4$ και καταλήγουμε πάλι

$|\nu|^3\leq 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)\Leftrightarrow|\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3\leq 0$. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-3x-3$, $x\in[4,+\infty)$.

Ισχύει $f'(x)=3x^2-6x-3>0$ όταν $x\in[4,+\infty)$, άρα η f γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[4,+\infty)$, επομένως έχουμε $|v|\geq 4\Rightarrow f(|v|)\geq f(4)\Rightarrow|v|^3-3|v|^2-3|v|-3\geq 1>0$ άτοπο .

4ος τρόπος: *(του Νίκου Ζανταρίδη)*

Ομοίως με τα παραπάνω , έστω $|\nu|\geq 4$ και καταλήγουμε πάλι $|\nu|^3\leq 3|\nu|^2+3|\nu|+3$. (1)

Είναι όμως $|\nu|^3=|\nu||\nu|^2\geq 4|\nu|^2=3|\nu|^2+|\nu||\nu|\geq 3|\nu|^2+4|\nu|=3|\nu|^2+3|\nu|+|\nu|\geq 3|\nu|^2+3|\nu|+4\overset{(1)}{>}|\nu|^3$, άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2}+c.$$

Για $x=0$: $\frac{1}{2}=c.$

Έτσι $\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2 = x^2+1.$

Θέτουμε $g(x)=f(x)+x,\quad x\in\mathbb{R}$. Είναι $g^2(x)=x^2+1>0$ οπότε έχουμε $g(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}.$

Γ2. 1ος τρόπος:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0 \quad x\in\mathbb{R}$$

Άρα f ↘ στο $\mathbb{R}$ οπότε "1−1"

$f\left(g(x)\right)=1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0) \Leftrightarrow g(x)=0$. Έχουμε $g'(x)=3x^2+3x=3\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\underset{\substack{\downarrow\\-1}}{(x+1)}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗	

$g(-1)=-\frac{1}{2} \qquad g(0)=-1$

Για $x\in(-\infty,0]$ ισχύει $g(x)\leq-\frac{1}{2}$

Για $x\geq 0$, $g(A_2)=g\left([0,+\infty)\right)=[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x))=[-1,+\infty)$

Το $0\in g(A_2)$ με , άρα $\exists x_0$ μοναδικό με $g(x_0)=0$.

2ος τρόπος:

Είναι $f\left(g(x)\right)=\sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1.$

Άρα $\sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1}=g(x)+1 \quad (1).$

Πρέπει $g(x)+1>0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}>0 \Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{3}{2},0\right)\cup(0,+\infty).$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x)+1=g^2(x)+1+2g(x) \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=2x^3+3x^2-2,\quad x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$.

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	-3/2		-1		0		+∞
φ΄(x)		+	0	-	0	+	
φ(x)		↗		↘		↗	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi\,(-1)=-1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi\,(0)=-2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x\in[0,+\infty)$ είναι το $[-2,+\infty)$, ενώ για $x<0$ είναι $\varphi(x)<0$.
Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0,+\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

Γ.3. Θέτουμε $K(x)=\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \text{εφ}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$

θα είναι $\int_{-\pi/4}^{0} f(t)dt>0$, δηλαδή $K(0)>0$.

Επίσης είναι $K\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f(0)\cdot\text{εφ}\frac{\pi}{4}=-1<0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο

ώστε $K(x_0)=0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[5\cdot\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=$$

$=5f\,'(1)+f\,'(1)=6f\,'(1)$.

διότι

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5\ \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{5h=u}{=}}\ 5\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=5f'(1).$$
- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\ \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=t}{=}}\ -\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'(1).$$

Άρα αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0.$$

Για $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+ ∞) με $f'(1) = 0$

άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Δ2. Είναι $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}, \quad x \in (0,+\infty)$.

Λόγω του $Δ_1$, αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο,
είναι $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.
Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du, \; x \in (1,+\infty)$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.
Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,
άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $x \in (1,+\infty)$.

Επειδή $8x^2 + 5 > 1$ & $2x^4 + 5 > 1$, έχουμε τις συνθέσεις
$\varphi(8x^2 + 5)$, $\varphi(2x^4 + 5)$ με Π.Ο.=$\mathbb{R}$ επομένως η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\varphi(8x^2+5) > \varphi(2x^4+5) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

***Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κι άλλες συναρτήσεις π.χ. $\int_{x+5}^{x+6} g(u)du$.

Δ3. $1^{ος}$ τρόπος:

Είναι $g''(x) = \dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

(εδώ για το πρόσημο δε μπορούμε να θεωρήσουμε συνάρτηση του αριθμητή , γιατί η f΄ δε δίνεται παραγ/μη, επομένως σκεφτόμαστε Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.)

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1,x): \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) \Rightarrow \dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \Leftrightarrow \; f(x) - 1 = (x-1)f'(\xi)$.

Άρα $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.
Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.
Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x = \alpha$ είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x-a) \overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow} y = g'(a)(x-a).$$

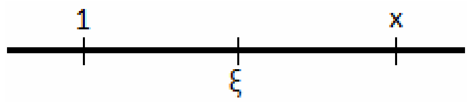
Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x)\geq y \Rightarrow g(x)\geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.
Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x=\alpha$.

2[ος] τρόπος:

$$g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1} \quad x>1$$

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-1}{x-1}}{x-1}$$



Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$ άρα $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

$$\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{x-1}<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}>0$$

Άρα $g''(x)>0$, $x>1$ άρα g 1 κυρτή.
Προφανής λύση το $x_0=\alpha$

$$h(x)=(\alpha-1)\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)=(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$$

$$h'(x)=(\alpha-1)g'(x)-(f(\alpha)-1)=(\alpha-1)\left[g'(x)-\frac{f(\alpha-1)}{\alpha-1}\right] \quad \alpha-1>0$$

$$=(\alpha-1)(g'(x)-g'(\alpha))$$

- Αν $1<x<a\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} g'(x)<g'(\alpha)\Leftrightarrow h'(x)<0$ άρα h $\searrow$ $\to x_0$ μοναδική
- Αν $x>a\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow} g'(x)>g'(\alpha)\Leftrightarrow h'(x)>0$ άρα h $\nearrow$ $\to x_0$ μοναδική

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας, Πετρόπουλος Κώστας