Απαντήσεις Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απλός προσθετικός νόμος (απόδειξη σελ. 150)

Β. Ορίζεται ως $f_i = \frac{v_i}{v}$ όπου v_i: η αντίστοιχη συχνότητα εμφάνισης της τιμής x_i

(με $0 \le f_i \le 1$ και $\Sigma f_i = 1$) .

Γ. α.→ Λ β. →Σ γ. →Λ δ. →Σ ε. →Σ

ΘΕΜΑ 2ο

x_i	v_i	$x_i\ v_i$
2	6	12
3	x	3 x
5	3	15
8	4	32
Σύνολο	13+ x	59+3 x

Αφού

$$\overline{x} = 4 \Rightarrow \frac{59+3x}{13+x} = 4 \Rightarrow 59+3x = 4\cdot(13+x)$$

$$\Rightarrow 59+3x = 52+4x$$

$$\Rightarrow 3x-4x = 52-59$$

$$\Rightarrow -x = 7$$

$$x = 7$$

β) Είναι

$$s^2 = \frac{1}{20}[(2-4)^2\cdot 6+(3-4)^2\cdot 7+(5-4)^2\cdot 3+(8-4)^2\cdot 4]$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{20}(4\cdot 6+1\cdot 7+1\cdot 3+16\cdot 4)$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{20}\cdot(24+7+3+64)$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{98}{20} \Rightarrow\Rightarrow s^2 = 4,9 \Rightarrow s = \sqrt{4,9} \simeq 2,2$$

γ) Είναι $cv = \frac{s}{x}\cdot 100\% \Rightarrow cv \simeq \frac{2,2}{4}\cdot 100\% \Rightarrow cv \simeq 55\%$. Άρα : δείγμα <u>μη ομοιογενές</u> .

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7, \alpha \in \mathbb{R}$

α) $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$
- $f''(x) = 6x - 12$

Αφού ισχύει :

$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Rightarrow 2\cdot(6x-12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Rightarrow \alpha 24 - 15 \Rightarrow \alpha = 9$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-12x+9}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x^2-4x+3)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3\cdot(1-3)}{1+1} = \dfrac{3\cdot(-2)}{2} = -3$

γ) Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης . Είναι

$f'(x) = -3 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = -3 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ A(2 , -5) άρα

$(\varepsilon): y = -3x + \beta$

$-5 = -3\cdot 2 + \beta$

$-5 = -6 + \beta$

$-5 + 6 = \beta$

$\beta = 1$

άρα $(\varepsilon): y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$

α) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$ Για $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

x	-∞	2	+∞
f΄	+	0	−
f	↗		↘

$$f\max = f(2) = \ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 + 2$$

β) Για $x = 2$ έχω max το $\Rightarrow f\max = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2$.

$\Rightarrow f\max = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$

Β. α) Αφού $f :\downarrow$ στο $(2, +\infty)$, άρα : $f(2) > f(8)$. Οπότε

$R = f(2) - f(8) \Rightarrow R = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - (\ln 8\lambda^2 - 6\lambda - 2)$

$\Rightarrow R = \ln 2\lambda^2 - 6\lambda + 1 - \ln 8 - \lambda^2 + 6\lambda + 2$

$\Rightarrow R = 3 + \ln\dfrac{2}{8} \Rightarrow R = 3 + \ln\dfrac{1}{4}$

Ενώ για να βρούμε τη διάμεσο , τις τοποθετούμε κατά αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις .

Επομένως : f(8) , f(5) , f(4) , f(3) , f(2) , άρα $\delta = f(4) \Rightarrow \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β) Ω={1 , 2 , 3 , … , 100} A={∈ Ω / R +δ < -2}

$$R + \delta < -2 \Rightarrow 3 + \ln\frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2$$

Ισχύει : $\Rightarrow 3 + \lambda^2 - 6\lambda + \ln(\frac{1}{4}\cdot 4) < -2$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 3 + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

λ	-∞		1		5		+∞
λ^2-6λ+5		+	0	−	0	+	

$\lambda \in (1 , 5) \rightarrow \lambda = 2 , 3 , 4$

άρα $P(A) = \frac{3}{100}$.

Επιμέλεια : Πούλκα Χριστίνα