ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 30

Β. α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 16

Γ. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε: $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Leftrightarrow 50 = \alpha + 4 + 5\alpha + 8 + 4\alpha + \alpha - 1 + 2\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 50 = 13\alpha + 11 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = 3$

β. Τελικά ο πίνακας γράφεται:

x_i	v_i	$x_i\, v_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	50	77	–

Από τη στήλη $x_i\, v_i$ έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{77}{50} = 1{,}54$

γ. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο παίρνουμε τη στήλη αθροιστικών συχνοτήτων N_i. Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, της $25^{ης}$ που αντιστοιχεί στην τιμή 1 και της $26^{ης}$ που αντιστοιχεί στην τιμή 1 άρα $\delta = \dfrac{1+1}{2} = 1$.

δ. Ορίζουμε το ενδεχόμενο Α : ο μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία, άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2+6}{50} = \dfrac{8}{50} = 0{,}16$ ή 16%

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος που αποτελείται από τα αγόρια και τα κορίτσια του χορευτικού ομίλου και τα ενδεχόμενα Α: αγόρια και Κ: κορίτσια. Είναι N(Ω)= $x+(x+4)^2$, N(A)=x , N(K)= $(x+4)^2$, όπου x≥0.

α. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{x}{x+(x+4)^2}$.

Πρέπει $0\le P(A)\le 1 \Leftrightarrow 0\le \dfrac{x}{x+(x+4)^2}\le 1$ που ισχύει διότι x≥0.

β. Είναι $P(A)=\dfrac{1}{19} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+(x+4)^2}=\dfrac{1}{19} \Leftrightarrow 19x=x+(x+4)^2 \Leftrightarrow 19x=x+x^2+8x+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=8$

- Αν x=8 τότε $N(\Omega)=8+(8+4)^2=152>100$ άρα απορρίπτεται
- Αν x=2 τότε $N(\Omega)=2+(2+4)^2=38<100$ άρα δεκτό

Συνεπώς $N(\Omega)=38$ άτομα και $P(K)=\dfrac{N(K)}{N(\Omega)}=\dfrac{36}{38}=\dfrac{18}{19}$

γ. Έστω $f(x)=\dfrac{x}{x+(x+4)^2}=\dfrac{x}{x^2+9x+16}$, x≥0. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με $f'(x)=\dfrac{x^2+9x+16-2x^2-9x}{\left(x^2+9x+16\right)^2}=\dfrac{-x^2+16}{\left(x^2+9x+16\right)^2}$, x≥0

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow} x=4$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+16>0 \Leftrightarrow x^2<16 \overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow} x<4$

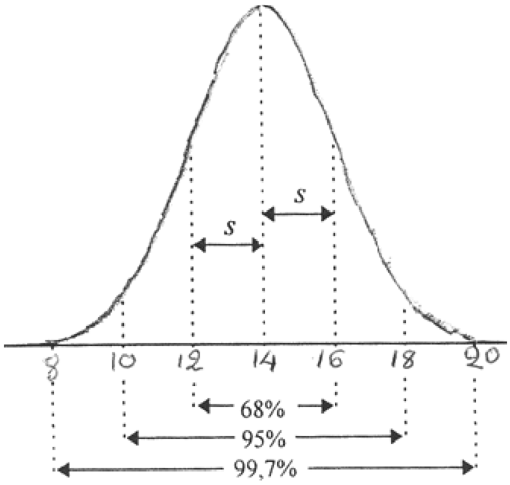
x	0	4	+∞
f΄(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για x=4 αγόρια με $P(4)=\dfrac{4}{68}=\dfrac{1}{17}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για κάθε x>0 έχουμε: $f'(x)=-4x+k+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Επειδή η εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x ισχύει $f'(1)=0 \Leftrightarrow -4+k+2=0 \Leftrightarrow k=2$. Τότε $f(1)=-2+2+4+10=14$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=14$

β. Είναι $f'(4) = -16 + 2 + 1 = -13$ οπότε τυπική απόκλιση $s = -\dfrac{2f'(4)}{13} = 2$ και μέση τιμή $\overline{x} = f(1) = 14$. Η καμπύλη κανονικής κατανομής είναι στο διπλανό σχήμα.



(i) Το 0,15% του δείγματος είναι 3 παρατηρήσεις άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 3\dfrac{100}{0{,}15} = 2000$.

Στο διάστημα (10,16) βρίσκεται το 13,5%+68%=81,5% του δείγματος, άρα $\dfrac{81{,}5 \cdot 2000}{100} = 1630$ παρατηρήσεις

(ii) Έχουμε $CV = \dfrac{S}{\overline{x}} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{10}$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Αν προσθέσουμε αριθμό α>0 σε κάθε παρατήρηση τότε το νέο δείγμα έχει μέση τιμή $\overline{y} = \overline{x} + \alpha = 14 + \alpha$ και ίδια τυπική απόκλιση S. Τότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y = \dfrac{S}{\overline{y}} = \dfrac{2}{14+\alpha}$. Το δείγμα γίνεται ομοιογενές $CV_y \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{2}{14+\alpha} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 20 \le 14 + \alpha \Leftrightarrow \alpha \ge 6$ άρα το α=6.