ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Β. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με $f'(x)=2(x-2)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και συνεπώς 1–1.

β. Αφού η f είναι 1–1 στο $[2,+\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη. Θέτω $y=f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y=2+(x-2)^2 \Leftrightarrow y-2=(x-2)^2 \overset{y\geq 2}{\Leftrightarrow} x-2=\pm\sqrt{y-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{y-2} \\ x=2-\sqrt{y-2} \text{ απορ. αφού } x\geq 2 \end{cases}$$

Αλλά το $x=2-\sqrt{y-2}$ απορρίπτεται διότι $x\geq 2$.

Τελικά λοιπόν: $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2}$ με $x\geq 2$

γ. **i.** Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x. Οπότε:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 2+(x-2)^2=x\Leftrightarrow (x-2)^2-(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$ Άρα τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία y=x είναι Α(2,2) και Β(3,3).

ii. Επειδή η C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=2\int_2^3|f(x)-x|\,dx$. Άρα:

- $f(x)-x=0\Leftrightarrow 2+x^2-4x+4-x=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ ή x=3
- $f(x)-x>0\Leftrightarrow 2+x^2-4x+4-x>0\Leftrightarrow x^2-5x+6>0\Leftrightarrow x<2$ ή x>3

Άρα $f(x)-x\leq 0$ για κάθε $x\in[2,3]$ και η $f(x)-x$ είναι συνεχής στο [2,3].

Συνεπώς: $E=2\int_2^3|f(x)-x|\,dx=-2\int_2^3(f(x)-x)\,dx=-2\int_2^3\left(x^2-5x+6\right)dx=$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_2^3=\left[-\frac{2x^3}{3}+5x^2-12x\right]_2^3=-18+45-36+\frac{16}{3}-20+24=$$

$$=-5+\frac{16}{3}=\frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. **i.** Έχουμε: $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2-z_3$ (1). Άρα έστω ότι:

$$|z_1-z_2|=|z_3-z_1| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |-z_2-z_3-z_2|=|z_3+z_2+z_3| \Leftrightarrow |z_3+2z_2|^2=|z_2+2z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_3+2z_2)(\overline{z_3}+2\overline{z_2})=(z_2+2z_3)(\overline{z_2}+2\overline{z_3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3\overline{z_3}+\cancel{2\overline{z_2}z_3}+\cancel{2z_2\overline{z_3}}+4z_2\overline{z_2}=z_2\overline{z_2}+\cancel{2z_2\overline{z_3}}+\cancel{2\overline{z_2}z_3}+4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3z_2\overline{z_2}=3z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow |z_2|^2=|z_3|^2 \Leftrightarrow 1=1 \text{ που ισχύει}$$

Ομοίως αποδεικνύεται $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$. Άρα: $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

ii. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $|z_1-z_2|\le|z_1|+|-z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|\le 1+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|\le 2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2\le 4$. Επίσης:

$$|z_1-z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\le 4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+|z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow 1-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+1\le 4 \Leftrightarrow 2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\right)\le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\text{Re}(z_1\overline{z_2})\le 2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1\overline{z_2})\ge -1$$

β. Έστω M_1,M_2,M_3 οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα. Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ άρα τα M_1,M_2,M_3 κινούνται στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης από τη σχέση $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$ ισχύει $(M_2M_1)=(M_1M_3)=(M_3M_2)$ δηλαδή το $M_1M_2M_3$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου και λόγω των $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, είναι $(OM_1)=(OM_2)=(OM_3)=1$, άρα το $M_1M_2M_3$ είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει x>0 και x≠1. Άρα $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}=-\left(\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x}\right)<0,\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty).$$ Άρα f↓

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$),

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0,\ x-1>0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2>0$),

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0,\ x-1<0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2>0$),

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$ (επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$)

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι f(A)= IR.

β. Επειδή $f((0,1))=\mathbb{R}$ άρα $0\in f((0,1))$, δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) και επιδή f $\downarrow$ στο (0,1) η ρίζα είναι μοναδική.
Επειδή $f((1,+\infty))=\mathbb{R}$ άρα $0\in f((1,+\infty))$, δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$ και επιδή f $\downarrow$ στο $(1,+\infty)$ η ρίζα είναι μοναδική.
Τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ακριβώς ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Είναι: $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $h'(x)=e^x$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 είναι:

$$y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\alpha}x-1+\ln\alpha$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ είναι:

$$y-e^\beta=e^\beta(x-\beta)\Leftrightarrow y=e^\beta x-e^\beta\beta+e^\beta$$

Οι δύο εφαπτομένες ταυτίζονται αν και μόνο αν: $\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^\beta\\ -1+\ln\alpha=-e^\beta\beta+e^\beta\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\alpha^{-1}=\ln e^\beta\\ -1+\ln\alpha=-\dfrac{1}{\alpha}\beta+\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\ln\alpha\\ -\alpha+\alpha\ln\alpha=-\beta+1\end{cases}\Leftrightarrow -\alpha+\alpha\ln\alpha=\ln\alpha+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\ln\alpha-\ln\alpha=\alpha+1\Leftrightarrow \alpha+1-(\alpha-1)\ln\alpha=0\overset{\alpha\neq1}{\Leftrightarrow}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$$

δ. Στο προηγούμενο ερώτημα έχει δειχθεί ότι οι εφαπτομένες των C_g, C_h ταυτίζονται σε εκείνα τα σημεία στα οποία οι τετμημένες είναι ρίζες της f(x)=0.
Γνωρίζοντας δε ότι η f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες, άρα και οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.