ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σελ. 335

Β.1. Θεωρία σελ. 225

Β.2. α. Λάθος (π.χ. $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty$) **β.** Λάθος (π.χ. $f(x)=\frac{1}{x}$) **γ.** Σωστό

δ. Σωστό (Αν θεωρήσουμε ότι η f΄ είναι συνεχής, αλλιώς λάθος)
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=i^3z+i^8z+i^{13}z+i^{18}z=\left(i^3+i^8+i^{13}+i^{18}\right)z=$
$=\left(-i+i^{2\cdot4+0}+i^{3\cdot4+1}+i^{4\cdot4+2}\right)z=\left(-i+i^0+i^1+i^2\right)z=(-i+1+i-1)z=0$

β. $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

$$f(13)=i^{13}\cdot z=i\cdot z=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

γ. $|z|=2$, $z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$

$$f(13)=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$$

Έστω $O(0,0)$, $B\left(1,\sqrt{3}\right)$, $\Gamma\left(-\sqrt{3},1\right)$ τότε:

$|OB|=2$, $|O\Gamma|=2$ και $|B\Gamma|=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο $O\hat{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο διότι:

$|OB|^2+|O\Gamma|^2=2^2+2^2=8=|B\Gamma|^2$ άρα $E_{OB\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$ τ.μ.

<u>2ος τρόπος για τον υπολογισμό του εμβαδού</u>

$$(OB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|1+3|=2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$ τότε $f(g(x_1))=f(g(x_2))$, δηλαδή $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$ και επειδή η $f\circ g$ είναι 1-1 θα είναι $x_1=x_2$, οπότε η g είναι 1-1.

β. Έχουμε : $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ και επειδή η g είναι 1-1 (από το α ερώτημα) η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την $f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow x^3-x=2x-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=x^3-3x+1$, $x\in \mathbb{R}$.

Έχουμε : $F'(x)=3x^2-3$. Τα πρόσημα της F και η μονοτονία της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η F είναι συνεχής στο [-2, -1] ως πολυωνυμική
  F(-2)=-1 , F(-1)=3 , οπότε F(-2) · F(-1) < 0
  Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (-2,-1)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_1)=0$, δηλαδή η εξίσωση F(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (-2,-1) και επειδή F γνησίως αύξουσα στο (-2,-1) η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_1<0$.
- Η F είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική
  F(0)=1 , F(1)=-1 , οπότε F(0) · F(1) < 0
  Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_2)=0$, δηλαδή η εξίσωση F(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1) και επειδή F γνησίως φθίνουσα στο (0,1) η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_2>0$.
- Η F είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική
  F(1)=-1 , F(2)=3 , οπότε F(1) · F(2) < 0
  Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_3 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_3)=0$, δηλαδή η εξίσωση F(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1,2) και επειδή F γνησίως αύξουσα στο (1,2) η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_3>0$.

Επειδή η εξίσωση F(x)=0 είναι τρίτου βαθμού οι παραπάνω ρίζες είναι και οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης, δύο θετικές και μία αρνητική.

ΘΕΜΑ 4ο

α. h(x) > g(x) για κάθε x ∈ [α, β], οπότε : $h(x)-g(x)>0$ και συνεπώς (Θεώρημα 3 σελ. 332) είναι :

$$\int_\alpha^\beta (h(x)-g(x))dx>0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

β. i) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ έχουμε :

$$f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}$$

ii) Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}>0$, οπότε :

$$f''(x)=-\frac{-e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}=\frac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Η f στο $[0,x]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.
Η f στο $(0,x)$ είναι συνεχής.
Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

Όμως $\xi\in(0,x) \Leftrightarrow 0<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0)<\dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\cdot f'(0)<f(x)<x\cdot f'(x) \overset{f'(0)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2}<f(x)<x\cdot f'(x)$$

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f(x)>\dfrac{x}{2}\geq 0$, για $x\geq 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι : $E=\int_0^1 f(x)dx$

Από το προηγούμενο ερώτημα για $x\geq 0$, έχουμε :

$$\frac{x}{2}<f(x)<x\cdot f'(x) \Leftrightarrow \int_0^1\frac{x}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 x\cdot f'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1<E<\left[x\cdot f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}<E<f(1)-E$$

Άρα $E<f(1)-E \Leftrightarrow 2E<f(1) \Leftrightarrow E<\dfrac{1}{2}f(1)$

Τελικά λοιπόν : $\dfrac{1}{4}<E<\dfrac{1}{2}f(1)$.