Ενότητα 1
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α) ΙΣΟΤΗΤΑ–ΠΡΑΞΕΙΣ–ΔΥΝΑΜΕΙΣ–ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1.1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη **μορφή** $\alpha+\beta i$.

$A=(1+i)^2+(1-i)^2$, $B=(1+2i)(1-i)^2-(1-2i)(1+2i)(1+i)^2$,

$\Gamma=2(1+i)-i^2(1-i)+i(1+2i)$, $\Delta=(1+i)(1+2i)+6i$.

1.2. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha+\beta i$:

$z_1=\dfrac{i}{1+i}$, $z_2=\dfrac{1+i}{1-3i}$, $z_3=(1+i)^4$, $z_4=\dfrac{7-3i}{1-i}$, $z_5=\dfrac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{1+i\sqrt{3}}$,

$z_6=\dfrac{1+i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}$, $z_7=(1+i)^3+\dfrac{1+2i}{(1-i)^2}$.

1.3. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

α) $(3-2i)^2$, $(-2-3i)^2$, $(3i-4)^2$

β) $(2x-i)(2x+i)-(2x+i)^2$

γ) $(\alpha+i)^2+(\alpha-i)^2-2(\alpha+i)(\alpha-i)-3i^2$

δ) $(\dfrac{\alpha+i}{2})^2-(\dfrac{\alpha-i}{2})^2$

ε) $(1-2i)^2(2-i)^2-(1+2i)^2(2+i)^2$

στ) $(\dfrac{i+1}{i-1}-1)^2$.

1.4. **Α.** Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $z=x(x+i)+(x+2)\cdot i$ να είναι:

α) πραγματικός **β)** φανταστικός αριθμός .

Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{x+3i}{2-i}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το x , ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

β) Αν $x=-6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.

[Πανελλαδικές Εξετάσεις Εσπερινά Επαν.2005]

1.5. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $z=(2+xi)(x-2i)$ να είναι

α) πραγματικός **β)** φανταστικός αριθμός .

1.6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , ψ για τους οποίους ισχύει :

α) $xi - \frac{2}{\psi} = 3$ β) $x^2 - 3(x+1) + 2i = \psi i - 5$ γ) $(1+i)x + (1-i)\psi = 3 - i$

δ) $(1+2i)x + (3-5i)\psi = 1 - 3i$ ε) $x + \psi + ix\psi = -i$ στ) $\frac{i}{x} + \frac{i}{\psi} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{5i-1}{\psi}$.

1.7. Αν οι μιγαδικοί $\alpha + 2\beta - 3\gamma + 3(\alpha+3)i$ και $4 + (\beta + 16\gamma)i$ είναι ίσοι, να αποδείξετε ότι $3\alpha + 2\beta = 13\gamma$.

1.8. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους :

α) οι αριθμοί $-3\alpha + \alpha i - 6$ και $2\beta i - \beta - 2i$ είναι ίσοι

β) ο αριθμός $(1+3i)\alpha + \beta i - 2$ είναι ίσος με 0

γ) ο αριθμός $\alpha - 5 + (\beta+1)i$ είναι ίσος με 5

δ) ο αριθμός $(\alpha+\beta)i - \alpha + 5$ είναι ίσος με i .

1.9. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών :
$2i,\ 2 - i,\ i^3 + 1,\ i^{1998} + 3,\ 4 + 3i$.

1.10. Να βρεθούν οι δυνάμεις :

α) $i^{-69} + i^{73} + i^{89} + i^{-93}$ β) $i^{2000} + i^{-2001} + i^{2002} + i^{-2003} + i^{2004}$.

1.11. Να βρεθούν τα αθροίσματα – γινόμενα :

α) $i^{\nu} + i^{\nu+11} + i^{\nu+22} + i^{\nu+33}$ β) $(1+i^{2001})(1+i^{2002})(1+i^{2003})(1+i^{2004})$ γ) $(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu})$.

1.12. Να γίνουν οι πράξεις :

α) $i(2-i) + 2i(1-i) - 3(i^2 - 2)$

β) $(3i^2 - 7i + 5)(4i^2 - 2i + 7) + (1 - i^2)(2 + 3i - 5i^2)$

γ) $(i^{4\nu+1} - i^{4\nu-1})(i^{4\nu+2} - i^{4\nu-2}) - (i^{4\nu+3} - i^{4\nu-3})(i^{4\nu} - i^{-4\nu})$

δ) $\frac{i+1}{i^5} + \frac{i^2 - i}{i^7} + \frac{i^4 - i}{i^9} - \frac{i-1}{i^3}$

ε) $(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\beta)(\eta\mu\beta + i\sigma\upsilon\nu\alpha) - (\eta\mu\alpha - i\sigma\upsilon\nu\beta)(\sigma\upsilon\nu\beta - i\eta\mu\alpha)$.

1.13. Βρείτε τις δυνατές τιμές των παρακάτω παραστάσεων
$A = 1 + i + i^2 + \dots + i^{\nu-1}$, $B = 1 - i + i^2 - \dots + (-1)^{\nu} \cdot i^{\nu}$ όπου ν θετικός ακέραιος .

1.14. Να αποδειχθεί ότι $\frac{(1+i)^{2001}}{(1-i)^{1999}} = 2$.

1.15. Αν οι φυσικοί αριθμοί κ, λ, μ, ν διαιρούμενοι με το 4 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδειχθεί ότι $i^{\kappa} \cdot i^{\lambda} \cdot i^{\mu} \cdot i^{\nu} = 1$.

1.16. Να βρείτε πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $A = i^{3\nu-2} - i^{-3\nu+5}$.

1.17. Να δειχθεί ότι $\forall\, \nu \in N$ $(1+i)^{4\nu} = (1-i)^{4\nu}$.

1.18. Αν $i^{3\nu+1} = i$, να βρεθεί ο ν.

1.19. Αν $i^{3\nu+1}=1$, να βρεθεί ο ν.

1.20. Να δειχθεί ότι $(1+i)^{4\nu}=(-4)^{\nu}$.

1.21. Για ποιους φυσικούς ισχύει η σχέση $(1+i^{\nu})(1+i^{3\nu})=0$.

1.22. Να βρεθεί το άθροισμα $i^0+2i^1+3i^2+4i^3+\ldots+99i^{98}$.

1.23. Να βρεθούν τα αθροίσματα :

α) $S=(1+i)+(2+3i)+(2^2+5i)+\ldots+[2^{\nu-1}+(2\nu-1)i]$

β) $S=i+i^3+i^5+i^7+\ldots+i^{2\nu-1}$

γ) $S=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{\nu-1}$

δ) $S=1+3i+5i^2+7i^3+\ldots+(2\nu-1)i^{\nu-1}$ **.**

1.24. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων (τέχνασμα 1=-i²) :

α) $(1+\alpha i)^{4\nu}-(\alpha-i)^{4\nu}$ β) $(\frac{\alpha-i}{1+\alpha i})^{2\nu}-(\frac{i+\alpha}{1-\alpha i})^{2\nu}$

γ) $(\frac{2+i}{1-2i})^{2\nu}(\frac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i})+(\frac{1+3i}{3-i})^{2\nu}(\frac{\alpha-\beta i}{\beta+\alpha i})$ δ) $(1-\alpha i)^{4\nu}-(\alpha+i)^{4\nu}$

ε) $(\frac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i})^{2\nu}-(\frac{x-yi}{y+xi})^{2\nu}$ στ) $(\alpha+\beta i)^{14}+(\gamma-\delta i)^{14}+(\beta-\alpha i)^{14}+(\delta+\gamma i)^{14}$.

1.25. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z=(\alpha+\beta i)^4+(\beta+\alpha i)^4$ είναι πραγματικός .

1.26. Να βρείτε τον $\bar{z}$ αν :

α) $z=-2+3i$, β) $z=\frac{5}{3}$, γ) $z=-2i-5$, δ) $z=0$,

ε) $z=-i$, στ) $z=5i$, ζ) $z=-1$.

1.27. Να βρείτε τις τιμές των $x,y\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $z_1=-3+i(2x-y)$ και $z_2=x-5y-3i$ είναι συζυγείς.

1.28. Να βρείτε τον συζυγή του $z=\frac{(1+2i)^2(3-i)}{i(1+i)^3}$ χωρίς να εκτελεστούν οι πράξεις και έπειτα να τον γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$.

1.29. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $z=(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}$ είναι πραγματικός.

1.30. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει**(εξίσωση)** :

α) $z+\bar{z}+i(z+i)+2=0$ **β)** $\bar{z}+i(z-\bar{z})+3=0$ **γ)** $\bar{z}=z^2$.

1.31. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} z+iw=2i-3 \\ 5z-6iw=-24-5i \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2\bar{z}+\bar{w}=3 \\ iz-2w=3i-4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2iz-w=1-6i \\ z+2iw=i \end{cases}$

1.32. Να βρεθούν **οι τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών z και w** .
α) $z = 5 - 12i, \quad w = 24 - 70i$ β) $z = 9 + 40i, \quad w = 16 - 73i$
γ) $z = 1 - 2\sqrt{2}i, \quad w = 2 + 2\sqrt{3}i$.

1.33. Να λυθούν ως προς το z οι εξισώσεις :
α) $z^2 = 7 - 24i$ **β)** $(z-2)^2 = 8 + 6i$ **γ)** $z^2 = -8 + 6i$, **δ)** $z^2 = 5 - 12i$.

1.34. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις :
α) $z^2 - 4z + 5 = 0$ **β)** $z^2 - iz + 6 = 0$
γ) $z^2 - (5+i)z + 12 + 5i = 0$ **δ)** $(3-i)z^2 - 5z + 7 + i = 0$
ε) $z^2 + 5 = 0$ **στ)** $z^2 + 18i = 0$
ζ) $(iz)^2 + 4 = 0$ **η)** $\left(\frac{2z-3i}{z+i}\right)^2 + 9 = 0$.

1.35. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις :
i) $x^2 + 2x + 6 = 0$ **ii)** $x^2 - 4x + 5 = 0$ **iii)** $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$
iv) $x^2 + x + 1 = 0$ **v)** $x^3 - 8 = 0$ **vi)** $x^6 - 1 = 0$
vii) $iz^3 + z^2 + iz + 1 = 0$.

1.36. Αν μία ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + x + \gamma = 0, \ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι ο αριθμός $1 + 2i$, να βρείτε τις τιμές των α και γ.

1.37. Να λυθεί η εξίσωση $1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + z^4 = 0, z \in C^*$.

1.38. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $z^2 - z + 1 = 0$, να αποδείξετε ότι:
α) $z^{40} + z^{20} + 1 = 0$, **β)** $z^{70} + \frac{1}{z^{70}} = -1$.

1.39. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = x + yi$ με $\alpha^2 + \beta^2 = x^2 + y^2 = 1$.
Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $u = \left(\frac{z-w}{z+w}\right)^{2000}$ είναι πραγματικός.

1.40. Αν $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων :

$$A = z^3, \quad B = \frac{i}{z^2 + z + 1}, \quad \Gamma = \frac{i^{1999}}{z^2 + 1}, \quad \Delta = 1 + z^{1997} + z^{1998} + z^{1999} .$$

1.41. Έστω οι μιγαδικοί $z = 2 + i\alpha, \ w = 2 - 2i, \ \frac{1}{u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{w}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε ο u να είναι φανταστικός .

1.42. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z ισχύει $w^2 + z^2 = 0$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $z\bar{w}$ και $\bar{z}w$ είναι φανταστικοί .

1.43. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις (γεωμ.τόπος):

i) $\text{Re}(z)=1$ **ii)** $\text{Im}(z)=0$ **iii)** $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=2$

iv) $[\text{Re}(z)]^2+[\text{Im}(z)]^2=4$ **v)** $[\text{Re}(z)]^2-4[\text{Im}(z)]^2=0$ **vi)** $z-\bar{z}=4i$

vii) $\text{Re}(z+2)=\text{Im}(2z-1)$

1.44. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z=x+yi$ που ικανοποιούν τις σχέσεις **(γεωμ.τόπος)**:

i) $z+\bar{z}-i(z-\bar{z})=2$ ii) $z+2\bar{z}=3$ iii) $z\bar{z}+i(z-\bar{z})-3=0$.

1.45. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση : $z^2-2z=(\bar{z})^2-2\bar{z}$.

1.46. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$ και $w=iz+1+i$. Αν η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x+\psi-2=0$, να δείξετε ότι η εικόνα P του w κινείται σε μια ευθεία (δ) .

1.47. Να βρεθεί ο μιγαδικός $z=x+yi\neq 0$. Αν $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=1$ να αποδειχθεί ότι η εικόνα του z ανήκει σ' ένα κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο $(0,0)$.

1.48. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z=x+\psi i$ για τους οποίους ισχύει :

ι) $\text{Re}(z+2\bar{z})=1$ **ii)** $\text{Im}(2z-\bar{z})=\text{Re}(z^2)$ **iii)** $\text{Im}(\bar{z}-z)=\text{Im}(z^2)$.

1.49. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $\theta\in[0,2\pi)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=(1-\eta\mu\theta)+(2+\sigma\upsilon\nu\theta)i$ κινείται σε έναν κύκλο, ο οποίος και να προσδιοριστεί.

β) Ομοίως αν $z=(1-\eta\mu(\pi\theta))+(2+\sigma\upsilon\nu(\pi\theta))i$ **γ)** $z=[1+\eta\mu(\pi-\theta)]+[3-\sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta)]i$

1.50. Αν η εικόνα M του μιγαδικού αριθμού $z\neq 0$ κινείται στον κύκλο $(C): x^2+y^2=1$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα N του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1}{z}$ κινείται στον ίδιο κύκλο.

1.51. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $\text{Im}(\frac{z-2}{z-6})=\text{Re}(\frac{z-2}{z-6})$.

1.52. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z=\lambda-5+(15-2\lambda)i, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , όταν ο λ διατρέχει το $\mathbb{R}$,

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή των αξόνων O (0, 0).

1.53. Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$ $x,y\in\mathbb{R}^*$ για τον οποίο ισχύει $\text{Re}(z\bar{z})=\text{Im}(z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$, βρίσκονται σε κύκλο.

1.54. Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$ για τον οποίο ισχύει $z\bar{z} + 3z - 5\bar{z} = 8i\,\mathrm{Im}(z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$, βρίσκονται σε κύκλο.

1.55. Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$. Αν ο αριθμός $w = \dfrac{i\bar{z} - 1}{z - i}$, $z \neq i$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$, βρίσκονται σε ευθείες και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

1.56. Δίνεται ο μιγαδικός $w = \dfrac{z+2}{z-i}$, $z \neq i$ και $z = x + yi$. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν ο w είναι πραγματικός, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή,

β) Αν ο w είναι φανταστικός, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο.

1.57. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει :

α) $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$, β) $\dfrac{z-i}{z-1} \in I$.

1.58. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + yi$ με $z \neq i$ για τους οποίους ισχύει : α) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1-z}{1-iz}\right) = 0$, β) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right) = 0$.

1.59. Έστω ο μιγαδικός $w = z\bar{z} - z^2 - 4(z + \bar{z})$ με $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων $M(x,y)$ όταν :

α) $w \in \mathbb{R}$, β) $w \in I$.

1.60. Δίνεται ο μιγαδικός $w = \dfrac{z+1}{z-2i}$ όπου $z = x + yi$. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, αν η εικόνα του μιγαδικού w ανήκει στον άξονα $y'y$.

1.61. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + yi$ που ικανοποιούν τη σχέση $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

1.62. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + yi$ ώστε ο μιγαδικός $w = z^2 + z + 1$ να είναι φανταστικός.

1.63. Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{z+1}{1-i}$ κινείται στον άξονα $x'x$, να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων $M(x,y)$.

1.64. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων $M(x,y)$ τα οποία επαληθεύουν τη σχέση

$$x + yi = \frac{3}{2 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta} .$$

1.65. Δίνεται ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ και ο μιγαδικός $w = \dfrac{z}{\bar{z}}$. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων .

1.66. Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i \neq 0$ και Μ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Αν το Μ κινείται στον κύκλο $c: x^2 + \psi^2 = 1$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα Ρ του μιγαδικού $w = z + \frac{1}{\bar{z}}$ κινείται σε κύκλο.

1.67. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + \psi i$ με $x \neq 0$ και $w = z - \frac{4}{z}$.

i) Αν $w \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εικόνα Μ του z κινείται στον άξονα $x'x$ χωρίς το (0,0).

ιι) Αν ο w είναι φανταστικός, να δείξετε ότι η εικόνα Μ του z κινείται σ'ένα κύκλο.

1.68. Έστω οι μιγαδικοί $z = x + yi$ και $w = z^2 + z + 1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z όταν:

i) $w \in \mathbb{R}$.

ii) τα σημεία $A(1), M(z)$ και $P(w)$ είναι συνευθειακά και $y \neq 0$.

1.69. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ(z) με $z = x + yi$ όταν ισχύει:

$$(1-x)(3+i) + (y-\lambda)(5+2i) = \lambda(3+2i)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

1.70. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των ριζών της εξίσωσης:

$$z^2 - 6(\sigma\upsilon\nu\theta)z + 5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 = 0\ .$$

1.71. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ(z) με $z = x + yi$ όταν ισχύουν οι σχέσεις:

α) $z = 3\lambda - 2i(4-\lambda)$

β) $x + (y - 2\lambda^2)i = \lambda(1+i) - 3 + i$

γ) $z = (\lambda + 2i)^2$

δ) $z = 1 - \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$

ε) $x^2 - 6y + (y^2 - 2x)i = \lambda + (6-\lambda)i$

στ) $z = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda + i}$

ζ) $z = 1 - \sigma\upsilon\nu\theta + (2\eta\mu\theta)i$

η) $z = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta}$.

Β) ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1.72. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών :

$5+12i,\quad \sqrt{3}-i,\quad \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2+i},\quad (1-i)(1+\sqrt{3}i)^3,\quad i^7,\quad (1-\sqrt{3}i)^{10}$

1.73. Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών :

α) $2+3i, 3-2i, \sqrt{7}+\sqrt{6}i, \sqrt{13}i, \sqrt{13}$

β) $1+\sqrt{2}i, 1-\sqrt{3}i, \sqrt{2}-i, \sqrt{2}+\sqrt{3}i$

γ) $(1-\sqrt{2}i)(3+\sqrt{3}i), (3-\sqrt{2}i)^2(\sqrt{3}+i)$

δ) $(1-i)^5(\sqrt{5}+\sqrt{3}i), (1+\sqrt{2}i)^2(2-i)^3(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$

ε) $\dfrac{3+4i}{1-2i}, \dfrac{10i}{\sqrt{3}-i}, \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i}$

στ) $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x - i\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x + i\eta\mu 2x}$

ζ) $\dfrac{1-i}{4+3i} - \dfrac{1+i}{3-4i}$.

1.74. Αν $z=3+4i$ και $w=1-i\sqrt{3}$, να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών:

$z,\quad w,\quad zw,\quad \dfrac{z}{w},\quad zw^3,\quad \dfrac{w^2}{z}$.

1.75. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει :

α) $|z|^2 = -z^2$ β) $|z-2| = 2z$ γ) $|2z-1| = 2\overline{z}$ δ) $\overline{z}^5 z^9 = 1$.

1.76. Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει :

α) $|z|=3$, β) $|z-1-3i|=4$, γ) $|z-2|=|z+4-3i|$

1.77. Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει :

α) $2<|z|<3$, β) $|z+i|\ge 3$, γ) $|z-i|>|z+i|$, δ) $|z-2|-|z+2|=2$.

1.78. Έστω ο μιγαδικός z με $|z|=1$ και $z\neq 1$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w=i\dfrac{1+z}{1-z}$ είναι πραγματικός .

1.79. Έστω οι μιγαδικοί z, w με $zw\neq -1$ και $|z|=|w|=1$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $u=\dfrac{z+w}{1+zw}$ είναι πραγματικός .

1.80. Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z\neq w$ και $|z|=|w|$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $u=\dfrac{z+w}{z-w}$ είναι φανταστικός .

1.81. Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq 1$ και $|z|=1$. Να αποδειχθεί ότι ο $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ είναι φανταστικός.

1.82. Έστω ο μιγαδικός z με $|z| = 1$. Να αποδειχθεί ότι ο $w = \dfrac{1 - z + z^2}{1 + z + z^2}$ είναι πραγματικός.

1.83. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $\big|z + |z|\big| + \big|z - |z|\big| = 2|z|$, να αποδειχθεί ότι ο z είναι πραγματικός.

1.84. Χωρίς να λυθεί η εξίσωση $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^{\nu} = \dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και ν θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι όλες οι ρίζες της είναι πραγματικές.

1.85. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z όταν ισχύουν οι ισότητες :

α) $|z-18| = 3|z-2|$ β) $|z-2| = |2z-1|$ γ) $|z-12| = |3z-4|$

δ) $2|z+9| = |4z+9|$ ε) $|4z+3| = |12z+1|$ στ) $|z+2i| = |2z+i|$

ζ) $|z-3i| = |3z-i|$ η) $|z-4i| = 2|z-i|$ θ) $3|4z+i| = 2|9z+i|$

ι) $4|4z-9i| = 3|z-16i|$ ια) $|z+9+3i| = |3z+3+i|$ ιβ) $|3z+6+4i| = |6z+3+2i|$

ιγ) $32(z-1)^5 = (4z-1)^5$ ιδ) $32(z-3)^5 = (4z-3)^5$ ιε) $(z+2+4i)^{13} = (2z+1+2i)^{13}$.

1.86. Να αποδειχτούν στο C οι συνεπαγωγές :

α) $z^2 + u^2 = 0 \Rightarrow |z+u| = |z-u|$ β) $\log|z+100| = 1 + \log|z+1| \Rightarrow |z| = 10$.

1.87. Να αποδειχτούν στο C οι ισότητες , οι συνεπαγωγές και οι ισοδυναμίες :

α) $|u| = 1, w = \dfrac{z+u}{1+\bar{z}u} \Rightarrow |w| = 1$ β) $\begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}$ $\left|\dfrac{z+\alpha}{z+\beta}\right| = \left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right| \Rightarrow \alpha + \beta = 0$

γ) $|z-u| = |1-z\bar{u}| \Rightarrow |z| = 1$ ή $|u| = 1$ δ) $|z+u|^2 + |\bar{z}-\bar{u}|^2 = 2(|z|^2 + |z|^2)$

ε) $|z+u| = |z-u| \Leftrightarrow |z+u|^2 = |z|^2 + |u|^2$.

1.88. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να αποδειχτεί ότι ισχύει $|z+u|^2 + |z-u|^2 = 2|z|^2 + 2|u|^2$ *«Κανόνας του παραλληλογράμμου»* .

1.89. Να αποδειχτεί στο C η ισοδυναμία : $|z+u|^2 = |z|^2 + |u|^2 \Leftrightarrow |z+u| = |z-u|$.

1.90. Για το μιγαδικό αριθμό z να δειχτεί η ισότητα : $\big|z + \bar{z} + 2|z|\big| + \big|z + \bar{z} - 2|z|\big| = 4|z|$.

1.91. Αν $|z-1| = 2|z-2| \Rightarrow 3|z|^2 + 14\,\mathrm{Re}(z) = -15$.

1.92. Αν $|z+i| = |z-i| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

1.93. Αν $\left.\begin{matrix} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

1.94. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$, τότε $\left|\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \rho$.

1.95. Να δειχτεί ότι :

α) $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z-i} \in I$

β) $|z| = |w| \Leftrightarrow \dfrac{z-w}{z+w} \in I$

γ) $|u| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z} - uz}{1-u} \in \mathbb{R}(z \in \mathbb{C})$

δ) $\dfrac{z - i|z|}{z + i|z|} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in I$

ε) $\left.\begin{array}{l} |z| = |u| \\ |z-i| = |u-i| \end{array}\right\} \Rightarrow z - u \in \mathbb{R}$

στ) $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z^{\nu}+1}{z^{\nu}-1} \in I$

ζ) $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \dfrac{(z+u)^{\nu}}{z^{\nu} + u^{\nu}} \in \mathbb{R}$

η) $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \dfrac{z+u}{1zu} \in \mathbb{R}$

θ) $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \dfrac{z^2 + u^2}{1 + z^2 + u^2} \in \mathbb{R}$

ι) $|z| = |u| = \kappa \Leftrightarrow \dfrac{z+u}{z-u} \in I$

ια) $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \dfrac{z^2 + zu + u^2}{z^2 - zu + u^2} \in \mathbb{R}$

ιβ) $|z+3| = |z-3| \Leftrightarrow z \in I$

ιγ) $z + \overline{z} = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$

ιδ) $|z^2 + 1| = |z^2 - 1| \Rightarrow z^2 \in I$ **.**

1.96. Να αποδειχθεί ότι :
α) $|2z-1| = |z-2| \Leftrightarrow |z| = 1$, β) $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$.

1.97. Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι : $|1 + z\overline{w}|^2 + |z-w|^2 = \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right)$.

1.98. Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι : $|1 - w\overline{z}|^2 + |z+w|^2 = \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right)$.

1.99. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί .Να αποδειχθεί ότι :
Αν $|z+w| = |z| = |w| \neq 0$, τότε $|z-w| = \sqrt{3}|z|$.

1.100. Αν για τους μιγαδικούς z, w, u ισχύουν $|z| = |w| = |u| = 1$ και $z + w + u = 1$, να αποδειχθεί ότι : $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{u} = 1$.

1.101. Να αποδειχθεί ότι $|z| < |1-z| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) < \dfrac{1}{2}$.

1.102. Αν z, w μιγαδικοί, να αποδειχθεί ότι : $|z-w|^2 \leq \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right)$.

1.103. Να αποδείξετε ότι :
α) $|2z-1| = |z-2| \Leftrightarrow |z| = 1$, β) $|2z-i| = |iz+2| \Leftrightarrow |z| = 1$,
γ) $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$.