ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εισηγητής : Αθανασιάδης Κώστας
Διάρκεια: 3 ώρες
Απρίλιος 2011

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ είναι συνεχείς στο Δ και
$f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει : $f(x)=g(x)+c$.

(Μονάδες 10)

Β. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του $i^{-\nu}$ όπου ν ∈ Ν ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .

1.	Το μήκος της διανυσματικής ακτίνας του αθροίσματος δυο μιγαδικών, ισούται με το άθροισμα των μηκών των διανυσματικών ακτινών τους.	**Σ**	**Λ**
2.	Μια συνάρτηση f:A → IR είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y $\in \mathbb{R}$ η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .	**Σ**	**Λ**
3.	Αν $\lim\limits_{x\to 0}(2f(x)-g(x))=\ell$, και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε σίγουρα δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$.	**Σ**	**Λ**
4.	Αν $f'(x)>0$ και $g'(x)<0$ στο (α,β), τότε οι c_f και c_g τέμνονται το πολύ σ' ένα σημείο.	**Σ**	**Λ**
5.	Ισχύει πάντοτε $\int_{\alpha}^{\beta}(f^2(x)+5)dx>0$.	**Σ**	**Λ**

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παράσταση $A(z)=4z-\overline{z}$, $z\in\mathbb{C}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\Pi=\left(A(i)+A(2i)+A(3i)-28i\right)^{10}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε την ισοδυναμία : $A(z)\in I \Leftrightarrow z\in I$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $z=x+yi$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του , όταν ισχύει
$|A(A(z))-16\,\mathrm{Im}(z)\cdot i|=|\,\Pi^2\,|$ και όταν $|A(A(z))|=|\,\Pi-i\,|$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν A(z)$\neq 0$ να δείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|A(z)|^x-|A(2z)|^x\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2009$ καθώς και τη συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)+x^2, x>0$.

α) Αν $g''(x)>2$ για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή .

(Μονάδες 7)

β) Αν $\frac{f(3)}{f(5)}=e^{16}$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (3 , 5) ώστε : $f'(\xi)+2\xi\cdot f(\xi)=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $f(1)=e\cdot f(2)$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (1 , 2) ώστε : $g'(\xi)=2$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου η C_f τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy και η $g(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{f(x)}dt$.

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x)+\int_1^x f(t)dt\geq xf(x), \forall\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν ισχύει $f'(x)<0$ & $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε την κυρτότητα της g στο [1,+∞) και έπειτα να δείξετε ότι $x-1\leq g(x), \forall x\geq 1$.

(Μονάδες 8)

Καλή Επιτυχία