Ενότητα 6
ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει : $F'(x) = f(x)$ **, για κάθε** $x \in \Delta$ **.**

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:
Υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες της μορφής : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, και μόνο αυτές.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών της f σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και συμβολίζεται $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ όπου F μια παράγουσα της f στο Δ .

Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε :

- $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$ **για κάθε λ ∈ R***
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ **.**
- $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ και $(\int f(x)dx)' = f(x)$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ .

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	
1. $\int 0dx = c$	**7.** $\int συνx dx = ημx + c$
2. $\int 1dx = x + c$	**8.** $\int ημx dx = -συνx + c$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	**9.** $\int \frac{1}{συν^2 x} dx = εφx + c$ **και** $\int (1+εφ^2 x) dx = εφx + c$
4. $\int x^α dx = \frac{x^{α+1}}{α+1} + c, α \in \mathbb{R} - \{-1\}$	**10.** $\int \frac{1}{ημ^2 x} dx = -σφx + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$	**11.** $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c, x > 0$
6. $\int α^x dx = \frac{α^x}{\ln α} + c, 0 < α \neq 1$	**12.** $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c, x > 0$

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν σε κάθε δ ι ά σ τ η μ α ,στο οποίο οι συναρτήσεις που εμφανίζονται μέσα στα ολοκληρώματα έχουν νόημα.

Εάν στους παραπάνω τύπους το x αντικατασταθεί από το κx+λ, $κ \neq 0$ τότε το Β΄ μέλος πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{κ}$.Π.χ.

$\int e^{κx+λ} dx = \frac{1}{κ} e^{κx+λ} + c,$	$\int \frac{1}{κx+λ} dx = \frac{1}{κ} \ln\|κx+λ\| + c,$	$\int συν(κx+λ) dx = \frac{1}{κ} ημ(κx+λ) + c, ...$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + c$	**6.** $\int \frac{f'(x)}{ημ^2 f(x)} dx = -σφf(x) + c$
2. $\int f'(x) f^ν(x) dx = \frac{f^{ν+1}(x)}{ν+1} + c, ν \in N$	**7.** $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
3. $\int f'(x) συνf(x) dx = ημf(x) + c$	**8.** $\int f'(x) \cdot α^{f(x)} dx = \frac{α^{f(x)}}{\ln α} + c, 0 < α \neq 1$
4. $\int f'(x) ημf(x) dx = -συνf(x) + c$	**9.** $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c, f(x) > 0$
5. $\int \frac{f'(x)}{συν^2 f(x)} dx = εφf(x) + c$	**10.** $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΑ

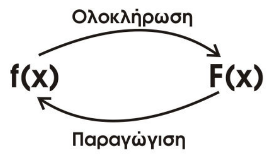
1. Η F λέγεται και αντιπαράγωγος ή γεννήτρια της f στο Δ.

2. **Η σταθερά c λέγεται και σταθερά ολοκλήρωσης.**

3. Στο αόριστο ολοκλήρωμα η σταθερά c αφορά ΜΟΝΟ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού Δ και όχι ένωση διαστημάτων . Έτσι αν $\Delta = A_1 \cup A_2$ και F αρχική της f τότε ισχύει :
$$\int f(x)dx = \begin{cases} F(x)+c_1, & x \in A_1 \\ F(x)+c_2, & x \in A_2 \end{cases}, \text{όπου } A_1 \cap A_2 = \varnothing \quad .$$

4. Αν $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \le \alpha \\ f_2(x), x > \alpha \end{cases}$ συνεχής στο α, τότε έχει αρχική
$F(x) = \begin{cases} F_1(x)+c_1, x \le \alpha \\ F_2(x)+c_2, x > \alpha \end{cases}$,όπου c_1 , c_2 έχουν τέτοια σχέση ώστε F συνεχής στο α.

5. Ισχύει



6. Κάθε **συνεχής συνάρτηση** σε ένα διάστημα Δ έχει μια παράγουσα (άρα άπειρες) στο διάστημα αυτό . Υπάρχουν και συναρτήσεις που **δεν έχουν** Αρχικές π.χ. $f(x) = \begin{cases} 8, x \ge 1 \\ 3, x < 1 \end{cases}$,διότι δεν υπάρχει αρχική της ,παραγ/μη στο $x_0 = 1$.

7. Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι μια οικογένεια συναρτήσεων , οι οποίες για κάθε $x \in \Delta$ έχουν ίσες παραγώγους , άρα ίσες κλίσεις .

8. Αν έχουμε το $\int f(x)dx$ τότε η μεταβλητή ως προς την οποία υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα φαίνεται από το dx και όχι από την f (x) . Έτσι για παράδειγμα : $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$. Ενώ $\int \eta\mu x dt = \eta\mu x \int 1 dt = (\eta\mu x)t + c$.

9. **Δεν ισχύουν** :
$$\begin{cases} \int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{f(x)dx}{g(x)dx} \\ [\int f(x)dx]^2 = \int f^2(x)dx \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους , τότε ισχύει :
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Παραδείγματα:

- Είναι : $\int xe^x dx = \int (e^x)' x dx = e^x - \int (x)' e^x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x + c$.
- Είναι : $\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x\ln x - \int x(\ln x)' dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$

Μορφές ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης	
1. $I = \int e^{\alpha x+\beta} \cdot P(x)dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο	2. $I = \int ημ(\alpha x+\beta)\cdot P(x)dx$
3. $I = \int συν(\alpha x+\beta)\cdot P(x)dx$	4. $I = \int \alpha^x \cdot P(x)dx$, $0 < \alpha \neq 1$
5. $I = \int f(x)\cdot \ln Q(x)dx$, όπου f(x),Q(x) πολυώνυμα του x	6. $I = \int e^{kx} ημ(\alpha x+\beta)dx$
7. $I = \int e^{kx} συν(\alpha x+\beta)dx$	8. $I = \int \frac{1}{x} f(x)dx$
9. $I = \int \frac{1}{συν^2 x}\cdot f(x)dx$	10. $I = \int \frac{1}{ημ^2 x}\cdot f(x)dx$

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής (αντικατάσταση)

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή : $I = \int f(g(x))g'(x)dx$.

Ισχύει τότε : $I = \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$ όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΑ

10. Η παραγοντική μέθοδος εφαρμόζεται όταν το προς αναζήτηση ολοκλήρωμα είναι **γινόμενο απλών συναρτήσεων** και μπορεί να πάρει τη μορφή $\int f(x)g'(x)dx$.

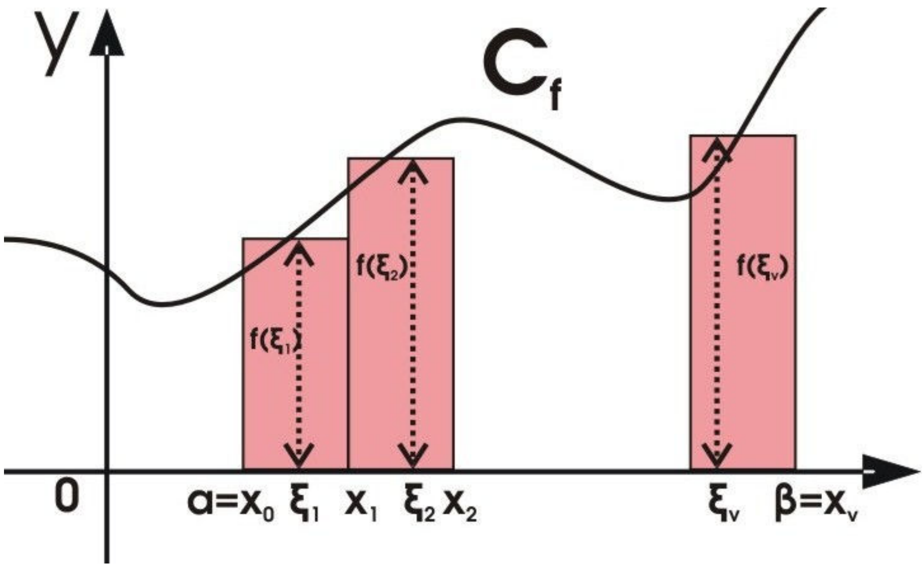
    Φυσικά θα πρέπει το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης να είναι ευκολότερο από αυτό του α΄ μέλους .

11. Η μέθοδος της αντικατάστασης εφαρμόζεται συνήθως σε τύπους σύνθετων συναρτήσεων.
12. **Χαρακτηριστική κατηγορία :** $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ **.**

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός εμβαδού επίπεδου χωρίου

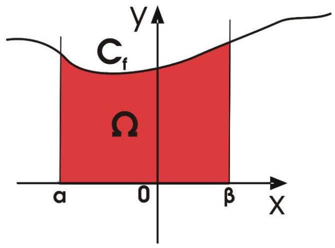
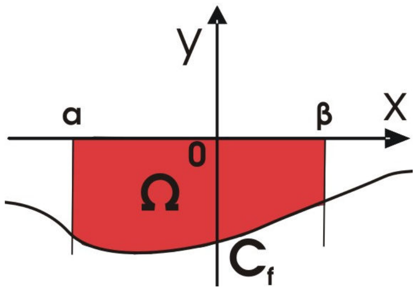
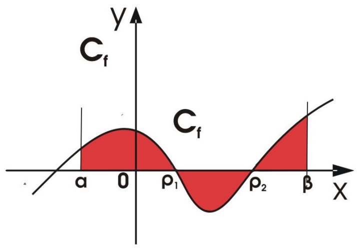
Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α , β] με $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.
Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής :



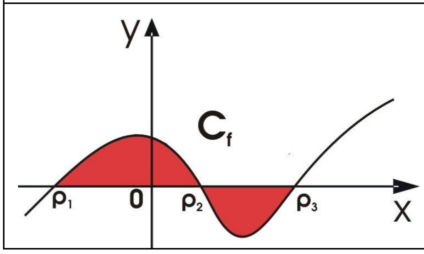
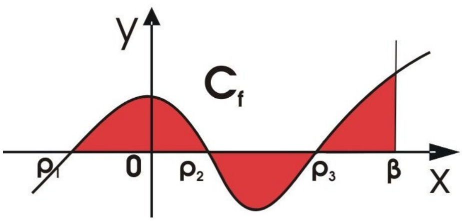
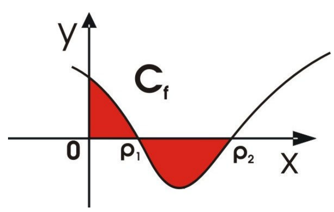
- Χωρίζουμε το διάστημα [α , β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 <_2 < ... < x_\nu = \beta$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa], \kappa = 1, 2, ..., \nu$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών αυτών ισούται με : $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + ... + f(\xi_\nu)\Delta x$.
- Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων ξ_κ . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του χωρίου Ω και συμβολίζεται με Ε(Ω) . Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \ge 0$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

✓ **Εμβαδόν Ε του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = α$, $x = β$.**

<table>
<tr>
<td>α) Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [α , β]$ τότε $E = \int_α^β f(x)dx$.</td>
<td>β) Αν $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [α , β]$ τότε $E = -\int_α^β f(x)dx$.</td>
<td>γ) Αν η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο [α , β] .
$E = \int_α^{ρ_1} f(x)dx - \int_{ρ_1}^{ρ_2} f(x)dx + \int_{ρ_2}^{β} f(x)dx$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Γενικά πάντως και για τις τρεις περιπτώσεις ισχύει : $E = \int_α^β |f(x)|dx$.</td>
</tr>
</table>

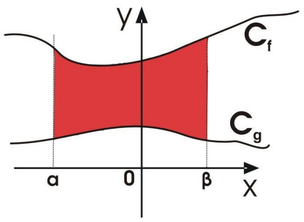
<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

<table>
<tr>
<td>Αν ζητείται το εμβαδόν μεταξύ C_f και άξονα $x'x$ τότε : βρίσκουμε τις ρίζες έστω $ρ_1 < ρ_2 < ρ_3$ και είναι :
$E = \int_{ρ_1}^{ρ_3} |f(x)dx| = \int_{ρ_1}^{ρ_2} f(x)dx - \int_{ρ_2}^{ρ_3} f(x)dx$</td>
<td>Αν ζητείται το εμβαδόν μεταξύ C_f , $x = β$, $x'x$ τότε εννοείται ότι το άλλο άκρο του ολοκληρώματος που θα μας δώσει το εμβαδόν είναι η ρίζα ρ της εξίσωσης : $f(x) = 0$.
Έτσι : $E = \int_ρ^β |f(x)|dx$, στο διάστημα [ρ , β] και $f(ρ) = 0$.</td>
<td>Αν ζητείται το εμβαδόν μεταξύ C_f , $x'x$, $y'y$ τότε το ένα άκρο του ολοκληρώματος είναι $x = 0$ και το άλλο η ακραία ρίζα $x = ρ_2$ όπου $ρ_2$ η ρίζα της $f(x) = 0$,
$E = \int_0^{ρ_2} |f(x)|dx$, στο διάστημα $[0 , ρ_2]$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

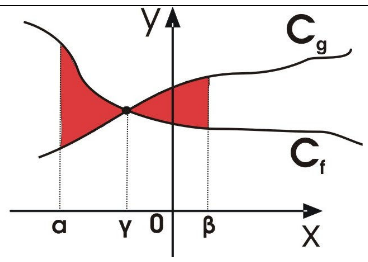
✓ **Εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f , C_g ΔΥΟ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.**

α) Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$ τότε :
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx \quad .$$

β) Αν $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$ τότε :
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)]dx \quad .$$



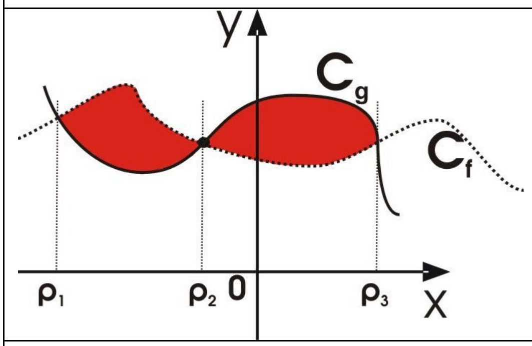
γ) Έστω ότι η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha , \beta]$. Για παράδειγμα $f(x) \geq g(x)$ αν $x \in [\alpha , \gamma]$ και $f(x) \leq g(x)$ αν $x \in [\gamma , \beta]$ τότε : $E = E_1 + E_2$
$$= = \int_{\alpha}^{\gamma} [f(x) - g(x)]dx + \int_{\gamma}^{\beta} [g(x) - f(x)]dx$$



Γενικά πάντως και για τις τρεις περιπτώσεις ισχύει : $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$

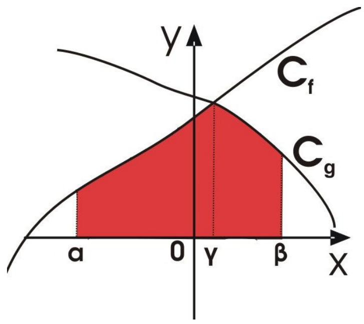
<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g . Στην περίπτωση αυτή λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ και βρίσκουμε έτσι τις τετμημένες των κοινών παραστάσεων C_f , C_g έστω για παράδειγμα $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε
$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} [f(x) - g(x)]dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} [g(x) - f(x)]dx$$

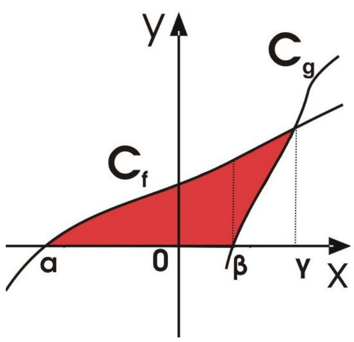


Γενικά ισχύει : $E = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} |f(x) - g(x)| dx$

όπου ρ_{min} , ρ_{max} η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα αντίστοιχα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.



$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} g(x)dx$$



$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx - \int_{\beta}^{\gamma} g(x)dx \quad \text{ή}$$
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} [f(x) - g(x)]dx$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

6.1. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1) Βασικά αόριστα ολοκληρώματα:

Αναλύουμε το ολοκλήρωμά μας σε άθροισμα απλούστερων ολοκληρωμάτων κάνοντας πράξεις μέσα στο ολοκλήρωμα με **επιμεριστική, ιδιότητες δυνάμεων, χρήση ταυτοτήτων,διαιρεση πολυωνύμων, διάσπαση ή απλοποίηση κλάσματος ,τύπους τριγωνομετρίας,** και έπειτα χρησιμοποιούμε τους τύπους των βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων και τις ιδιότητες αυτών.
Ειδικά με τον τύπο :

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ **υπολογίζονται πολλές μορφές όπως** $\frac{1}{x^{\kappa}}, \frac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\kappa}}}, \frac{P(x)}{x^{\kappa}}, \frac{P(x)}{\sqrt[\nu]{x^{\kappa}}}$ **.**

Ασκήσεις 6.2,6.3,6.5,6.6.

2) Μορφή $\int f(\kappa x + \lambda)dx, \ \kappa \neq 0$:

Εφαρμόζουμε τους βασικούς τύπους μόνο που το β΄ μέλος πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{\kappa}$.Π.χ

$$\int e^{\kappa x+\lambda}dx = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa x+\lambda} + c, \quad \int \frac{1}{\kappa x+\lambda}dx = \frac{1}{\kappa}\ln|\kappa x+\lambda| + c, \quad \int \sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)dx = \frac{1}{\kappa}\eta\mu(\kappa x+\lambda) + c,$$

$$\int (\kappa x+\lambda)^{\alpha}dx = \frac{1}{\kappa}\frac{(\kappa x+\lambda)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ .$$

Ειδικός χωρισμός κλάσματος:

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}dx = \int \frac{\alpha(x+\frac{\beta}{\alpha})}{\gamma(x+\frac{\delta}{\gamma})}dx = ... = \frac{\alpha}{\gamma}\int (1 + \frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha\gamma}}{x+\frac{\delta}{\gamma}})dx = \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}\cdot \ell n\left|x+\frac{\delta}{\gamma}\right| + c$$ **π.χ.**

$$\int \frac{2x+6}{5x-15}dx = \frac{2}{5}\int \frac{x+3}{x-3}dx = \frac{2}{5}\int \frac{x-3+6}{x-3}dx = \frac{2}{5}\int [1+\frac{6}{x-3}]dx = \frac{2}{5}x + \frac{12}{5}\cdot \ell n|x-3| + c$$ *Άσκηση 6.4*

3) Μορφή $\int f'(x)dx = f(x) + c$:

Προσπαθούμε να εμφανίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την παράγωγο μιας συνάρτησης (άθροισμα , γινόμενο , πηλίκο ή παράγωγο σύνθετης συνάρτησης) . *Ασκήσεις 6.7,6.8,6.9.*
Για παράδειγμα :

$$\int [f'(x) \pm g'(x)]dx = \int [f(x) \pm g(x)]'dx, \quad \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = \int [f(x)g(x)]'dx \ ,$$

$$\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \int [\frac{f(x)}{g(x)}]'dx, \quad \int f'(x)e^{f(x)}dx = \int [e^{f(x)}]'dx, \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int [\ln|f(x)|]'dx \quad \text{κ.λπ.}$$

4) Παραγοντική Ολοκλήρωση

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$, όπου οι f, g είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους. *Ασκήσεις 6.32-6.36.*

Μορφές ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης

ΜΟΡΦΗ	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ
1. $I = \int e^{\alpha x+\beta} \cdot P(x)dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο	$I = \frac{1}{\alpha}\int (e^{\alpha x+\beta})' \cdot P(x)dx$, **ο τύπος της παραγ. ολοκλ. εφαρμόζεται τόσες φορές όσες ο βαθμός του $P(x)$**
2. $I = \int \eta\mu(\alpha x+\beta) \cdot P(x)dx$	$I = -\frac{1}{\alpha}\int (\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta))' \cdot P(x)dx$, **ο τύπος της παραγ. ολοκλ. εφαρμόζεται τόσες φορές όσες ο βαθμός του $P(x)$**
3. $I = \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta) \cdot P(x)dx$	$I = -\frac{1}{\alpha}\int (\eta\mu(\alpha x+\beta))' \cdot P(x)dx$, **ο τύπος της παραγ. ολοκλ. εφαρμόζεται τόσες φορές όσες ο βαθμός του $P(x)$**
4. $I = \int \alpha^x \cdot P(x)dx$, $0 < \alpha \neq 1$	$I = \frac{1}{\ln\alpha}\int (\alpha^x)' \cdot P(x)dx$
5. $I = \int f(x) \cdot \ln Q(x)dx$, όπου f(x),Q(x) πολυώνυμα	$I = \int F'(x) \cdot \ln Q(x)dx$ όπου $F'(x) = f(x)$
6. $I = \int e^{kx}\eta\mu(\alpha x+\beta)dx$	$I = \frac{1}{k}\int (e^{kx})'\eta\mu(\alpha x+\beta)dx$ ο τύπος της παραγ. ολοκλ. εφαρμόζεται **πάντοτε δυο φορές** και καταλήγουμε σε εξίσωση ως προς το αρχικό ολοκλήρωμα.
7. $I = \int e^{kx}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx$	$I = \frac{1}{k}\int (e^{kx})'\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx$, ο τύπος της παραγ. ολοκλ. εφαρμόζεται **πάντοτε δυο φορές** και καταλήγουμε σε εξίσωση ως προς το αρχικό ολοκλήρωμα.
8. $I = \int \frac{1}{x}f(x)dx$	$I = \int (\ln\lvert x\rvert)'f(x)dx$
9. $I = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot f(x)dx$	$I = \int (\varepsilon\varphi x)'f(x)dx$
10. $I = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot f(x)dx$	$I = \int (-\sigma\varphi x)'f(x)dx$