ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

6.1. Α) 1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφ. παρ/σης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Α) 2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β) 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος.

α) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0

β) αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

γ) αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Β) 2. Να αντιστοιχίσετε τη συνάρτηση της στήλης Α με την εφαπτομένη της στο x_0 στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	**1.** $y - -2x + \pi$
β. $f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$	**2.** $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3\lvert x\rvert, x_0 = 0$	**3.** $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	**4.** $y = -9x + 5$
	5. δεν υπάρχει

(2000-1ο)

6.2. **Α) 1.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α) 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ **β.** $|z|^2 = z^2$ **γ.** $|z| = -|\bar{z}|$ **δ.** $|z| = |\bar{z}|$ **ε.** $|i\bar{z}| = |z|$

Β) 1. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $|z_1 \cdot z_2|$	**α. 4**
2. $|z_1^2|$	**β. 2**
3. $|z_2|^2$	**γ. 25**
4. $-|\bar{z}_1|$	**δ. 5**
5. $|iz_2|$	**ε. –2**
	στ. –5
	ζ. 10

Β) 2. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$. **(2001-1ο)**

6.3. **Α) 1.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , τότε

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Α) 2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = ...$,

β) $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = ...$,

γ) $\int_\alpha^\beta (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = ...$ **,** $\lambda , \mu \in \mathbb{R}$ και f , g συνεχείς συναρτήσεις στο [α , β] .

Β) 1. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f''(x) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0 , 3) έχει κλίση 2.

Β) 2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (e^x + x)dx$ **β)** $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)dx$. **(2001-Επαν.)**

6.4. Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

β. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

Β. α. Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $g(x) = [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 + 2001$ είναι σταθερή.

ii. $g(x) = 2001$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ii. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε τα σημεία Α(1, 2) και Β(2, − 4) ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f .

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. **(2001-Ο.Ε.Φ.Ε.)**

6.5. Α) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α , β] .Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β] , τότε να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Β) 1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Β) 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α , β] και συνεχής στο (α , β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α , β] μία μέγιστη τιμή .

β) Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη .

γ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$.

ε) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . **(2002-1ο)**

6.6. Α) ~~Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή , να δείξετε ότι : $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2))$.~~

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

β) Η εικόνα f (Δ)ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α , β] στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

δ) Αν ναι συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [α , β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τότε πάντα ισχύει $f'(x_0) = 0$.

ε) Αν η συνάρτησηf είναι συνεχής στο [α , β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$. **(2002)**

6.7. α. Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(x_0) = \eta$.

β. Έστω οι αριθμοί $\alpha, \beta, \lambda \in \Re$ με $\alpha < \beta$ και η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η γραφική της παράσταση έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

iii. Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α, β).

iv. Ισχύει $(\int_\alpha^\beta f(x)dx)' = f(x)$.

v. $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2 \neq 0$ και έστω Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθ. τμήματος ΑΒ.

ii. Αν $z_2 = i \cdot z_1$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (Ο είναι η αρχή των αξόνων).

δ. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2002-Ο.Ε.Φ.Ε.)**

6.8. **Α)** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Β) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .

α) Αν z ένα μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του , τότε ισχύει: $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

β) Έστω μία συνάρτησηf, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η fείναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 . **(2003-1ο)**

6.9. **Α)** Έστω x μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της x στο Δ , να αποδείξετε ότι:

α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της x στο Δ και

β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή .

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση .

α) Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει πάντα $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

β) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α , x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0 , β) τότε το f (x_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ) Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in$ A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ) Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:
$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Γ) Πότε μια ευθεία x = x_0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **(2003-1ο-Επαν.)**

6.10.Α. α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=συνx$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-ημx$.

β. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $Δ$ για τις οποίες ισχύει: $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του $Δ$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in Δ$.

γ. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Να δώσετε τον ορισμό: Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος***.

α. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Α.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$, τότε $f(x)>0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[α,β]$ τότε, υπάρχει $x_0\in(α,β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0)>0$.

δ. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα $Δ$ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in Δ$.

ε. Αν f συνεχής στο $[α,β]$ με $f(x)\ge 0$ και ισχύει $\int_α^β f(x)dx>0$, τότε υπάρχει $x_0\in[α,β]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)>0$.

στ. Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[α,β]$ και ισχύει $\int_α^β f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές. **(2003-Ο.Ε.Φ.Ε.)**

6.11. Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $Δ$. Αν

α) Η f είναι συνεχής στο $Δ$ και

β) $f'(x)=0$ για κάθε x στο εσωτερικό του $Δ$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $Δ$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος .

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό .

β) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους .

γ) Αν f , g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες .

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim_{x\to x_0}f(x)}$, εφόσον $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0, $k\in N$ και $k\ge 2$.

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα (α , β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. **(2004-1ο)**

6.12. **A)** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

B) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος.

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

γ) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g'(x_0)$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ.

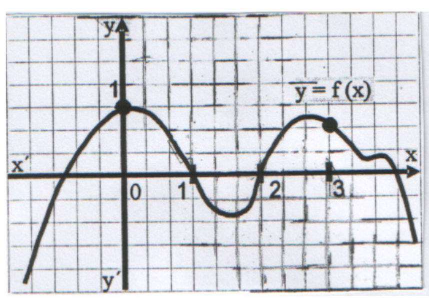
(2004-1ο-Επαν.)

6.13. **A.** Να αποδείξετε το θεώρημα:
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

B. Η συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1, I_2, I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$I_1=\int_0^3 f(x)dx$ $\qquad I_2=\int_0^3 f'(x)dx$ $\qquad I_3=\int_0^3 f''(x)dx$

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β

Στήλη Α	***Στήλη Β***
1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$	**α)** $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\eta\mu\frac{1}{x})$	**β)** 0
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$	**γ)** 1
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{e^x}$	**δ)** $+\infty$

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$. **(2004-Ο.Ε.Φ.Ε.)**

6.14. Α. α) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α , β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

δείξτε ότι για κάθε αριθμό n μεταξύ των f (α) και f (β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=n$.

β) Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος .

α) Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

γ) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x , τότε το σημείο Α ανήκει στην γραφ. παρ. της f^{-1} .

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

ε) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha\in\Delta$, τότε ισχύει:

$(\int_0^x f(t)dt)'=f(x)-f(\alpha),\forall x\in\Delta$.

στ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . **(2005-1ο)**

6.15. **Α) 1.** Έστω συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α) 2. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται «1-1» .

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος .

α) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

β) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α , x_0) και κοίλη στο (x_0 , β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της C_f .

γ) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους .

δ) Αν για δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε υποχρεωτικά. $f\circ g\neq g\circ f$.

ε) Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z,\overline{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x .

στ) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, τότε ισχύει: $\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$. **(2005-1ο-Επαν.)**

6.16.Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και $x>0$.
Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Γ. Να απαντήσετε αν είναι ***Σωστή*** ή ***Λάθος*** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1−1» αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<0$.

5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. **(2005-Ο.Ε.Φ.Ε.)**

6.17. **Α) 1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Α) 2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|z|^2 = z^2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 .

γ) Η εικόνα f (Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα .

δ) Ισχύει ο τύπος $(3x)' = x\cdot 3^{x-1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

ε) Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f', g' είναι συνεχής συναρτήσεις στο [α , β]. **(2006-1ο)**

6.18. **Α)** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .

α) Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και x_0 . Έστω επίσης $f(x)\neq 0,\ \forall x\in\Delta$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

β) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α , β) και $M'(\alpha,-\beta)$ των συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z} = \alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

γ) Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δε μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με Π.Ο $\Delta=[0,+\infty)$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \forall x\in(0,+\infty)$.

ε) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

στ) Έστω δύο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

1. Οι f , g είναι συνεχείς στο Δ και

2. $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει σταθερό c τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει: $f(x)=g(x)+c$. **(2006-1ο-Εσπ.)**

6.19. **Α) 1.** Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

Α) 2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει: $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2|$.

β) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

γ) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.

δ) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f (x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α , β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α , β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$. **(2006-1ο-Επαν.)**

6.20.Α. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

β) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος***.

i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι "1−1" όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ii. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

iii. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x) \neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ, τότε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

v. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και $\alpha < \beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

(2006-Ο.Ε.Φ.Ε.)

6.21. Α. 1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Α.3 Πότε η ευθεία y=ℓ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφ. παράστ. της f στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx > 0$.

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγώγισιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) >0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ε. Αν α>1 τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ **(2007)**

6.22.Α. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat .

β) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** .

ΠΡΟΤΑΣΗ	**Σ**	**Λ**
1. Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq \kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f .		
2. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της f (x) στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.		
3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο [α , β] .		
4. Αν για δύο συναρτήσεις f , g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε f (x)=g(x) για κάθε $x \in \Delta$.		
5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ , τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.		
6. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο [α , β] και ισχύει f (x)<g(x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta g(x)dx$.		

(2007-Ο.Ε.Φ.Ε.)