ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Εισηγητής : Αθανασιάδης Κωνσταντίνος

Θ Ε Μ Α 1ο

Έστω η συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο [α,β], με α > 0, και παραγωγισιμη στο (α,β).Έστω και οι μιγαδικοί

$z_1 = \alpha + if(\alpha)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$

A) Αν ισχύει $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_1 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\chi_1) = 0$.

B) Έστω οι πραγματικοί αριθμοί Α και Β , με $A \neq B$, ώστε

$$A z_1 \overline{z_2} + B \overline{z_1} z_2 = 100$$

Να αποδείξετε ότι :

α) ο μιγαδικός $z_1 \overline{z_2}$ είναι πραγματικός,

β) υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

γ) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Θ Ε Μ Α 2ο

Α.

α) Έστω η συνάρτηση f , με $f(\chi) = 4 - \chi^2$ και ένα σημείο Μ(α, f(α)), με 0<α<2. Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ Τότε αυτή είναι:

i. $y = -2\alpha\chi + \alpha^2$

ii. $y = -\alpha\chi + \alpha^2 - 4$

iii. $y = -2\alpha\chi + \alpha^2 + 4$

iv. $y = -2\alpha\chi$

β) Έστω Ε(α) το εμβαδά του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και από την εφαπτομένη ε.

i.Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης Ε(α), σαν συνάρτηση του α.

ii.Να βρεθεί το α , ώστε το Ε(α) να είναι ελάχιστο.

Β. Έστω η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \Re$ με $f(1)=0$, για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\chi} f(t)dt \geq x \quad , \forall \ \chi \in [-1,1]$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(0)=1$

β) υπάρχει $\chi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\chi_1} f(t)dt = \frac{1}{2}$

γ) υπάρχει $\chi_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \chi_0$

δ) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει με τους άξονες ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. *(Υποδειξη: Δειξτε ότι υπαρχει ξ ώστε $f'(\xi) =-1$)*

ΘΕΜΑ 3^o

Α. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και η συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ με τύπο

$$f(\chi) = \int_0^{2\chi} |z_1 t + z_2| dt$$ για την οποία ισχύει $f(\chi) \geq \chi$, $\forall \ \chi \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z_2| = \frac{1}{2}$

β) η εξίσωση $f(\chi)= 2020$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$

γ) για κάθε $\chi \in \Re$ ισχύει $\int_0^{\chi} \left| z_1 t + \frac{z_2}{2} \right| dt \geq \frac{x}{4}$

Β. Έστω $\chi \in \Re$ και ο μιγαδικός $z = \chi + \frac{i}{x+i}$

α) Να σημειώσετε στο γραπτό σας την σωστή απάντηση

i. $Im(z) > \frac{1}{2}$ ii. $Im(z) < -\frac{1}{2}$ iii. $Im(z) \geq 0$ iv. $Im(z) \leq \frac{1}{2}$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\chi \in \Re$, ώστε ο μιγαδικός z να είναι φανταστικός

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty} [\, Im(z).ημχ]$

δ) Αν ισχύει $Re(z)=Im(z)$, να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $z^{ν} = 2^{-9}.i$

Θ Ε Μ Α 4ο

Α. Έστω συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγισιμη στο (α,β) και για την οποία ισχύει

$f'(\chi) \leq 4 \quad \forall\ \chi \in (\alpha,\beta)$ και $f(\beta)=\beta^2+4$ και $f(\alpha) = 6\alpha- \alpha^2 -1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=1$ και $\beta=2$

β) $f(\chi)=4\chi$ για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$

Β. Ένα κινητό κινείται στον άξονα $\chi'\chi$, ώστε σε χρόνο $t > 0$ η θέση του να είναι

$$s(t) = \int_e^{et} \frac{t\ln x}{\chi^2+1}dx$$

Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού (ως συνάρτηση του e) τις χρονικές στιγμές

α) $t_1 = 1$

β) $t_2 = \frac{1}{e^2}$

Καλή Επιτυχία