ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ

1. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2,\ \chi \in R$.
   α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης f στο σημείο Μ(2α, $8\alpha^2$) $\alpha > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C, την ευθεία ε και τον άξονα y'y.
   β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha > 0$).

   Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, e] με $0 < f(\chi) < 1$ και $f'(\xi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(\chi_0) + \chi_0 \ln\chi_0 = \chi_0$. ($\Delta_1$ – 1994)

2. **Α.** Έστω ρ πραγματικός αριθμός Α(χ), Β(χ) πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το Α(χ) έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.
   Να αποδείξετε ότι, υπάρχει πολυώνυμο f(χ), τέτοιο ώστε $A(\chi).\ B(\chi) = (\chi - \rho)^2.\ f(\chi)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

   Β. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(\chi) = \chi^\nu(\nu\chi^3 + \kappa\chi^2 + \lambda\chi + 8)$ έχει παράγοντα το $(\chi - 2)^2$. (Δ_1 – 1994)

3. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{(z-1).(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z \in C$ και $Re(z) \neq 0$.
   α. Να αποδείξετε $f\left(-\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.
   β. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ(χ, y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha\chi + \beta y i$ με $\alpha, \beta, \chi, y \in R$ και $\alpha\beta\chi \neq 0$, ικανοποιούν τη σχέση : $Re[f(z)] = 0$. (Δ_1 – 1993)

4. **Α.** Δίνεται η ορθή γωνία χOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Oχ αντιστοίχως. Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2\text{ m/sec}$ και η θέση πάνω στον άξονα Oχ δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \upsilon t,\ t \in [0, 5]$, όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα).

α. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6m.

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:

$\int_{\alpha}^{x} e^{-t} f(t)dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x)$ με $\chi, \alpha \in R$. $(\Delta_1 - 1993)$

5. **Α. α)** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(\chi) = \ln f(\chi),\ \chi \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνον αν ισχύει η σχέση $f(\chi)f''(\chi) \geq [f'(\chi)]^2$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(\chi) = \ln(\chi^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β. α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(\chi) = \alpha^{\chi} - \chi,\ \chi \in R$ και $0 < \alpha < 1$.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$\alpha^{\lambda^2 - 4} - \alpha^{\lambda - 2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$, όπου $0 < \alpha < 1$ $(\Delta_1 - 1992)$

6. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = (\chi + 4)\,e^{-x},\ \chi \in R$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (χ, y) με $-1 \leq \chi \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(\chi)$.

Β. Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο R έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(\chi) = ce^{x}$, όπου c πραγματική σταθερά. $(\Delta_1 - 1992)$

7. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu \chi dx$, $\nu \in N^*$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει $I_\nu = \dfrac{1}{\nu - 1} - I_{\nu-2}$.

β) Να υπολογίσετε το I_5 .

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$f(\chi) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $\chi > 0$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα Οχ και τις ευθείες με εξισώσεις : $\chi = 1$ και $\chi = 4$ (Δ_1 – 1991)

8. Α. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^2 - 2\ln x$ με $\chi \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Έστω μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R , η οποία έχει συνεχή f'' στο R , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0, 1).

Αν ισχύει $\int_0^2 [x.f''(x) + 3\,.\,f'(x)]dx = -\dfrac{8}{3}$

να υπολογίσετε το $f(2)$. (Δ_4 – 1994)

9. Α. Έστω ότι η ευθεία $y = 2\chi + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty} [f(\chi) - 2\chi]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mu\,.\,f(x) + 4x}{x.f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

Β. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

β) Η εξίσωση $2e^x + 2\chi = \chi^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση την $\chi = 0$.

(Δ_4 – 1994)

10. Α. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3\chi+\mu,\ \chi\in R$ όπου ο μ είναι πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα (1, 2).
Β. Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ικανοποιεί τη σχέση : $\int_0^1 \chi g'(\chi)dx = 1993 - \int_0^1 g(x)dx$
να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για $\chi=1$. (Δ_4 – 1993)

11.Α. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση $f:\Delta \to R$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο χ_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε $f'(\chi_0)=0$.
Β. Μια βιομηχανία παράγει χ ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση : $K(\chi)=\frac{\alpha}{4}\chi^3$ όπου χ διατρέχει το ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{2}{9},\frac{9}{2}\right]$.
Τα έσοδα από την πώληση χ ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(\chi)=\chi^2,\ \chi\in(0,+\infty)$ και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(\chi)=E(\chi)-K(\chi),\ \chi\in(0,+\infty)$.
α) Να βρείτε την ποσότητα χ_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με Μ(α).
β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\left[\frac{2}{9},\frac{9}{2}\right]$ για την οποία το Μ(α) γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο κέρδος. (Δ_4 – 1993)

12.Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi e^{-\nu x},\ \chi\in R$ όπου ν μη μηδενικός φυσικός αριθμός.
Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.
Β. Να αποδείξετε ότι : $2 \le e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \chi e^{-\nu x}dx \le e$. ($\Delta_4$ – 1993)

13.Α. Να αποδειχθεί ότι για κάθε χ στο ανοικτό διάστημα (0, 1) ισχύει η σχέση $1 + \chi < e^x < 1 + e\chi$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(\chi) = \begin{cases} \chi^3 \eta\mu \dfrac{1}{\chi}, & \alpha\nu\ \chi \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ \chi = 0 \end{cases}$$

ι) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

ιι) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $\chi \in R$. (Δ_4 – 1992)

14.Α. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(\chi) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1), \quad x > 0.$$

α) Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε $\chi > 0$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$E(t) = \int_1^t (\chi - 2)\ln x\, dx \text{ για κάθε } t > 1.$$

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{E'(t)}{t\ln t}$. ($\Delta_4$ – 1992)

15.Α. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi + \gamma$, $\chi \in R$ και α, β, γ πραγματικούς αριθμούς η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

ι) Η συνάρτηση f είναι περιττή

ιι) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\chi_0 = 1$

ιιι) $\int_0^2 f(x)dx = 2$ (Δ_4 – 1992)

16.Α. Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $\chi_0 \in \Delta$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{x.f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(\chi_0) - \chi_0 f'(\chi_0)$

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(\chi) = \sqrt{\chi + 3} + \chi - 3$, $\chi \geq -3$ στο σημείο $\chi_0 = -3$.
(Δ_4 – 1991)

17.Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

α) Είναι συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β)

β) Για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ είναι $g(\chi) \neq 0$ και για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$ $g'(\chi) \neq 0$, και

γ) $f(\beta).g(\alpha) - f(\alpha).g(\beta) = 0$

Να αποδείξετε ότι :

1. Για την συνάρτηση F με $F(\chi) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α, β]

2. Υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$

Β. α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(\chi) > 0$, $\chi \in R$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(\chi) = [f(\chi)]^{\chi}$, $\chi \in R$

β) Έστω $\alpha > 0$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $[g(\chi)] = \alpha^{\sqrt{\chi^2+1}}$, $\chi \in R$ $(\Delta_4 - 1991)$

18.Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to R$ με $f(\chi) = \eta\mu^2\chi - \sqrt{2}\,.\eta\mu\chi + 2\sqrt{2}$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = 0$ και $\chi = e$. $(\Delta_4 - 1991)$

19.Α. Να αποδείξετε ότι: Αν οι συναρτήσεις f , g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in \Delta$ τότε και (f .g) είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και είναι $(f.g)' = f'(\chi_0)g(\chi_0) + f(\chi_0)g'(\chi_0)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση g , η οποία είναι ορισμένη στο R , δύο φορές παραγωγίσιμη σ'αυτό και ισχύει ότι $g(-1) = 7$. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(\chi) = 3(\chi - 2)^2.g(2\chi - 5)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και να υπολογίσετε την $f''(2)$. $(\Delta_4 - 1990)$

20. Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με:

$$f(\chi) = \frac{\chi^4}{3} + \frac{2\alpha\chi^3}{3} + (\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}).\chi^2 + (\alpha^3 + 7).\chi - 5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής. $(\Delta_4 - 1990)$

21. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 + \frac{2\alpha}{\chi} + \beta$ $(\alpha, \beta \in R)$ η οποία μηδενίζεται στο $\chi_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_0 = 2$.

α) Να βρεθούν τα α και β

β) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του. $(\Delta_4 - 1989)$

22. α) Να αποδείξετε ότι: Αν οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ και $(f+g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) + g'(\chi_0)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(\chi) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha}{\chi^3} + 1, & 0 < \chi < 2 \\ \dfrac{1 - \sqrt{\chi - 1}}{\chi^2 - 4}, & \chi > 2 \end{cases}.$$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2$. $(\Delta_4 - 1989)$

23. Α. α) Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta$ είναι $f(\chi) = 0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

β) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f' = g$, $g' = -f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g''' και είναι συνεχείς.
Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f'' + f = g'' + g = 0$ και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή. $(\Delta_1 - 1996)$

24. Να αποδείξετε τις ανισότητες :

α) $\eta\mu\chi < 2\chi,\ \chi > 0$, β) $\eta\mu\chi > \chi - \frac{\chi^3}{3}\ \forall\ \chi > 0$. $(\Delta_1 - 1996)$

25.Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :

$\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(\chi) + e^x$ για κάθε $\chi \in R$.

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει ότι :
$f(\chi) + f(\alpha + \beta - \chi) = c$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Να αποδείξετε ότι:

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta))$ (Δ_1 – 1996)

26.Α. α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι, αν $f'(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

β) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$f'(\chi) = g'(\chi) + \eta\mu^2\chi + e^x$ για κάθε $\chi \in [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(\chi) < g(0) + f(\chi)$ για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$.

Β. α) Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = e^{\alpha\chi}$ όπου $\alpha \in R$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$f''(\chi) + 2f'(\chi) = 3f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$.

β) Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in R$ με $\beta_1 \neq \beta_2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi) = \lambda e^{\beta_1 x} + \mu e^{\beta_2 x}$ με $\chi \in R$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός χ_0, τέτοιος ώστε $g(\chi_0) = g'(\chi_0) = 0$.

Να αποδειχθεί ότι $\lambda = \mu = 0$. (Δ_4 – 1996)

27.Α. α) Δίνεται η συνάρτηση g, συνεχής στο R, και

$f(\chi) = \int_0^{\chi} (x-t)g(t)dt$. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, όταν g (χ) ≠ 0 για κάθε $\chi \in R$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi) = \sqrt{\chi}$ και $f(\chi) = 2\chi - 1$ και την ευθεία $\chi = 0$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{1+\chi^2} + \lambda\chi$, $\lambda \in R$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$ $(\Delta_4 - 1996)$

28.Έστω ότι f (t) είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου $t \geq 0$ και $f: [0, +\infty) \to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με

$f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. $(\Delta_4 - 1996)$

29.Α. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(\chi) = (\chi - \kappa)^5(\chi - \lambda)^3$ με $\chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{5}{x-k} + \dfrac{3}{x7 - \lambda}$ για $\chi \neq \kappa$ και $\chi \neq \lambda$.

β. Η συνάρτηση $g(\chi) = \ln|f(\chi)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ).

Β. α. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει: Αν $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

β. Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt$, $\chi \in R$ με α, β πραγματικούς αριθμούς, είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\chi_0 \in R$ με $F'(\chi_0) = 0$, τότε $F(\chi) = 0$ για κάθε $\chi \in R$. $(\Delta_1 - 1995)$

30.Α. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ για την οποία είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$ και τη συνάρτηση $g(\chi) = 2 + \dfrac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $\chi \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

α. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(\chi_0, g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

β. $g(\chi_0) = 2 + f(\chi_0)$.

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0) = 1995$, $f'(0) = 1$ και

$$1 + \int_0^{\chi} f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt = \sigma\upsilon\nu^2\chi + \int_0^{\chi} f'(t)\eta\mu t\,dt .\quad (\Delta_1 - 1995)$$

31.Α. α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχουν τουλάχιστον ένας $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\chi_0) = n$.
β. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^4 - 2\chi^2 + \alpha,\ \alpha \in R$
ι) Αν $A(\chi_1, f(\chi_1))$, $B(\chi_2, f(\chi_2))$, $\Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.
ιι) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (-1, 0).
Β. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(\chi) f'(\chi) = 2 f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$.
Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(\chi_0, g(\chi_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$. (Δ_4 – 1995)

32.Α. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t, σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου Α ένας θετικός αριθμός.
Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t), από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση
$K'(t) = \dfrac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$.
Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.
Β. Αν $G(x) = \int_1^{\chi} f(t)dt$, όπου το $f(t) = \int_1^{3t} \dfrac{e^u}{\sqrt{u}} du$
και $\chi > 0,\ t > 0$, να βρείτε :
α. την $G''(1)$, β. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{(x)}.G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$. ($\Delta_4$ – 1995)

33.Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$.
Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = f(\alpha)/g(\alpha)$ και
$B = \dfrac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$.
Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $R - \{\alpha\}$, τέτοια ώστε:
$\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{(x-\alpha)^2}} + \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{x-\alpha}} + \dfrac{\phi(\chi)}{g(\chi)}$, $\forall \chi \in R - \{\alpha\}$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\lim\limits_{\chi \to \alpha} \varphi(\chi)$.
Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f, ορισμένη στο R, δυο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε: $(\chi - 2)f''(\chi) + (\alpha\eta\mu\chi - \beta\chi^2)f'(\chi) = e^{x^{-2}-1}$, για κάθε $\chi \in R$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f. (Δ_1 – 1997)

34.**Α.** Δίνεται πραγματική συνάρτηση g, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $g(\chi) > 0$ και $g''(\chi)g(\chi) - [g'(\chi)]^2 > 0$ για κάθε $\chi \in R$.
Να αποδείξετε ότι:
ι) η συνάρτηση g'/g είναι γνησίως αύξουσα
ιι) $g[(\chi_1 + \chi_2)/2] \leq \sqrt{\mathbf{g(x_1)g(x_2)}}$ για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in R$.
Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει
$g(\chi + \psi) = e^{\psi} g(\chi) + e^{\chi} g(\psi) + \chi\psi + \alpha$, για κάθε $\chi, \psi \in R$.
Να αποδείξετε ότι:
ι) $g(0) = -\alpha$
ιι) $g'(\chi) = g(\chi) + g'(0)\, e^{x} + \chi$, για κάθε $\chi \in R$. (Δ_1 – 1997)

35.**Α.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και ικανοποιούν τις σχέσεις : $f''(\chi) - g''(\chi) = 4$, για κάθε $\chi \in R$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$.

ι) Να βρείτε τη συνάρτηση $\tau(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, $\chi \in R$.

ιι) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

Β. Έστω f η πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R, που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Έστω $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι :

ι) $f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha)$, για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

ιι) $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$ $(\Delta_4 - 1997)$

36.Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο R, τέτοια ώστε $f(\chi) \geq 2$ για κάθε $\chi \in R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $\chi \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι $g(-3)g(0) < 0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$. $(\Delta_4 - 1997)$

37.Η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ ικανοποιεί τη σχέση :

$f(f(\chi)) + f^3(\chi) = 2\chi + 3$, $\chi \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 – 1».

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi^3 + \chi) = f(4 - \chi)$. $(\Delta_1 - 1998)$

38.Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0, με $Imz_0 < 999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z, με $z \neq z_0$ και $z \neq \bar{z}_0$, που ικανοποιούν τη σχέση :

$$\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \bar{z}_0|} = \frac{1998}{|z - z_0||z - \bar{z}_0|}.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α. Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί; Να εξετάσετε την περίπτωση $z = \bar{z}_0$.

Β. Ένας γεωργός προσθέτει χ μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(\chi) = M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi})$, $\chi \geq 0$ όπου M_0, Μ και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(\chi)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0; $(\Delta_1 - 1998)$

39. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow R$ για την οποία ισχύουν $f(\chi)>0,\ \chi>0,\ f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το A(1, 1).
α) Να δείξετε ότι η παράγωγος f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.
β) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\int_1^{\chi}\dfrac{f(t)}{2t^2}dt<\dfrac{x-1}{2},\ \ \chi>1.$
γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^{\chi}\left(1+\dfrac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \ \chi>1.$
δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^{x}e^{-t^2}dt<1$, για κάθε $\chi>1$. (Δ_1 – 1998)

40. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\tau)=2\tau+\mu,\ \tau\in R$, όπου η παράμετρος $\mu\in R$. Μια επιχείρηση έχει έσοδα Ε(τ) που δίνονται σε εκατομμύρια δρχ. με τύπο $E(\tau)=(\tau-1)\,\varphi(\tau),\ \tau\geq 0$, όπου τ συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας $K(\tau)=\varphi(\tau+4)$.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους Ρ(τ) για $\tau\geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι η επιχείρηση στο πρώτο έτος είχε ζημιά 12 εκατομ. δρχ.
β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;
γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;
δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\dfrac{111}{2}\int_0^6 P(\tau)d\tau$. ($\Delta_4$ – 1998)

41. Δίνεται η συνάρτηση $H(\chi)=12^{12}(e^{-4x}-e^{-\alpha x}),\ \ \chi\geq 0$ και $\alpha>4$.
α) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}H(\chi)=H(0)=0$
β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση Η(χ).
γ) Αν χ_1 ρίζα της $H'(\chi)$ και χ_2 ρίζα της $H''(\chi)$, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα χ_1 και χ_2.
δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $M=\dfrac{334}{75}\int_0^{\ln 2}H(\chi)dx$, όταν $\alpha=8$.
(Δ_4 – 1998)

42.Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο χ_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β. α) Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε χ ανήκει $[0, +\infty)$.

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει: $[f(\chi)]^5 + 2[f(\chi)]^3 + f(\chi) = (\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$ για κάθε χ ανήκει $[0, +4)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +4)$. (Δ_4 – 1999)

43.Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \eta\mu^2(\alpha\chi)$, $\chi \in R$ και $\alpha \in R$.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει:

$f''(\chi) + 4\alpha^2 f(\chi) = 2$ για κάθε χ ανήκει R.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1$, $\chi \in R$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [1, 3]$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = 3$. (Δ_4 – 1999)

44.Α. Έστω $f: R \to R$ συνάρτηση συνεχής στο R.

Έστω $I: R \to R$ συνάρτηση με

$I(\chi) = \int_0^1 [f(t)^2 - 2xt^2 f(t) + x^2t^2]dt$, για $\chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

$\chi_0 = 5\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to R$, με $f(\chi) = 2000 + |\ln(x-1)|$.

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα Α και Β, είναι κάθετες μεταξύ τους. (Δ_1 – 2000)

45. Έστω $f, g : R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R, τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(\chi) - g(\chi) = \chi - 4$, για κάθε $\chi \in R$.
Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3\chi - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $\chi \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: ι) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

ιι) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + 3x + \eta\mu 2\chi}{\chi f(x) - 3x^2 + 1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $\chi \to +\infty$. (Δ_1 – 2000)

46. Α. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα Δ. Αν $f(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ τέτοια, ώστε : $2\chi f(\chi) + (\chi^2 + 1) f'(\chi) = e^x$ για κάθε $\chi \in R$, με $f(0) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$, $\chi \in R$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. (Δ_4 – 2000)

47. Α. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \dfrac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$

β) Έστω ότι $4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 334$.

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ που ικανοποιεί την ισότητα

$\int_0^x (1 + t^2) f(t)dt = \chi^2 + \int_0^1 6x(t^2 + t)dt$, $\chi \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 1}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. (Δ_4 – 2000)

48.Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f(\chi_0) = \xi$.

Β. Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 + 2\chi - 1 - \eta\mu 2\chi$, $\chi \in R$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $\chi^3 + 2\chi - 1 = \eta\mu 2\chi$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0, 1). (Δ_4 – 2001)

49.Α. Η συνάρτηση $f: R \to R$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα $\int_\alpha^\beta f(x)e^{f(x)}dx = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(\alpha) = f(\beta)$

β) Η εξίσωση $f'(\chi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Β. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi + \frac{4}{\chi}$, $\chi > 0$

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \lambda$, $\chi = \lambda + 1$, όπου $\lambda > 0$, είναι $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln(1 + \frac{1}{\lambda})$

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν Ε(λ) γίνεται ελάχιστο. (Δ_4 – 2001)

50.Α. Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi) = \int_0^\chi \chi\sigma\upsilon\nu t\,dt$, $\chi \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $g''(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi - \chi\eta\mu\chi$, $\chi \in R$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(\frac{\pi}{2}, g(\frac{\pi}{2}))$

Β. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\alpha\chi^2 + \beta\chi}{\chi - 2}$, $\chi \in R - \{2\}$ όπου $\alpha, \beta \in R$.

Αν η ευθεία ε: $y = 2\chi - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, ποιες είναι οι τιμές των α, β; (Δ_4 – 2001)

51. Α. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 . \ln\chi$, $\chi > 0$.
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και την ευθεία $\chi = \chi_0$ όπου χ_0 είναι η θέση του τοπικού ακρότατου της f.
Β. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow R$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 2\chi$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, τέτοια ώστε: $f'(\xi_1).f'(\xi_2) = 4$. $(\Delta_1 – 2001)$

52. Α. Έστω η συνάρτηση
$f(\chi) = \chi^3 – 3\chi^2 . \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\chi.\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha$, $\chi \in R$ και $\alpha \in R$.
Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α, η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.
Β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει: $\int_0^x f(t)dt \geq \chi.e^{-x}$, για κάθε $\chi \in R$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0,f(0)). $(\Delta_1 – 2001)$