

Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 2009
ΘΕΜΑ 1^ο
A.1. σχολικό βιβλίο σελίδα 251

A.2. σχολικό βιβλίο σελίδα 213

B. α. $\rightarrow \Sigma$ **β.** $\rightarrow \Sigma$ **γ.** $\rightarrow \Lambda$ **δ.** $\rightarrow \Lambda$ **ε.** $\rightarrow \Lambda$
ΘΕΜΑ 2^ο

A.α) Αν $z = x + yi$ τότε $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{2} \\ \lambda = \frac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = x - 2$ Άρα οι εικόνες των

εικόνων του z ανήκουν στην ευθεία $y = x - 2$.

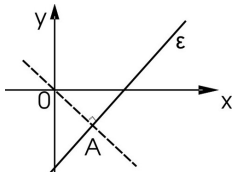
β) (1^{ος} τρόπος)

Το ελάχιστο μέτρο θα το έχει ο μιγαδικός του οποίου η εικόνα είναι το σημείο τομής A της $\varepsilon: y = x - 2$ και της κάθετης της που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Φέρνουμε την ευθεία $OA \perp \varepsilon$, $\lambda_{OA} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{-1}{1} = -1$ και αφού διέρχεται από την αρχή των

αξόνων θα είναι η $y = -x$. Λύνοντας το σύστημα $(\Sigma) \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, οπότε

$A(1, -1)$ και ο μιγαδικός που έχει το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$.



(2^{ος} τρόπος) Έχουμε $|z| = \sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2} = \sqrt{8\lambda^2 + 2}$. Αρκεί να γίνει ελάχιστη η

παράσταση $8\lambda^2 + 2$ η οποία σαν τριώνυμο έχει ελάχιστο για $\lambda = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{0}{-16} = 0$,

(είτε με παραγώγους) δίνει $\lambda = 0$ οπότε ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο

$z_0 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 0 - 1)i = 1 - i$.

B. Θέτω $w = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12) - \beta i = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha = 13 \\ 1 - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -4 \end{cases}$$

Επομένως $w = 3 + i$ ή $w = -4 + i$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Έχουμε $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$ στο $(-1, +\infty)$, και ισχύει $f(x) \geq 1$
 παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$ και αφού $f(x) \geq f(0)$ στο $(-1, +\infty)$
 για $x=0$ έχουμε ελάχιστο, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(1, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Από Θ. Fermat $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Διότι $f'(x) = [\alpha^x - \ln(x+1)]' = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$, $x > -1$.

B.α) Για $\alpha = e$ είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

β) Αφού f' γνησίως αύξουσα και $f'(0) = 0$ το 0 θα είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$
 $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$, αντίστοιχα εργαζόμαστε και στο $(-1, 0)$

x	1	0	$+\infty$
f'	\neq	-	0
f	\neq	\searrow	\nearrow

* Παρατηρούμε ότι όταν $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq f(0) \Rightarrow f(x) \neq 1$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2)[f(\beta)-1] + (x-1)[f(\gamma)-1]$ στο $[1, 2]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική.
- $g(1) = 1 - f(\beta) < 0$
 $g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$ (διότι $f(x) \geq 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-2)[f(\beta)-1] + [f(\gamma)-1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\xi-2)[f(\beta)-1]}{(\xi-1)(\xi-2)} + \frac{(\xi-1)[f(\gamma)-1]}{(\xi-1)(\xi-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)-1}{\xi-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\xi-2} = 0$$

άρα η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.



ΘΕΜΑ 4^ο

α.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση F , με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $F'(x) = f(x)$.
- Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση f_1 με $f_1(x) = x \cdot f(x)$. Η f_1 είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως γινόμενο συνεχών , άρα η H είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $H'(x) = x \cdot f(x)$.

- Η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{H(x)}{x} - F(x) + 3$ είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως πράξεις συνεχών (πηλίκο-άθροισμα – ολοκλήρωμα συνεχούς) (1) .
- στο $x_0 = 0$

$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} (F(x) + 3) = \\ &= 0 - F(0) + 3 = 3 \quad (2) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot f(x)}{1} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 0 \cdot f(0) = 0 \end{aligned}$
---	--

$$\begin{aligned} G(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{1 + \sqrt{1-t^2}} = 3 \quad (3) \end{aligned}$$

Από (2) και (3) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$, άρα η G είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (4) . Από (1) και (4)

προκύπτει ότι **η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$** .

β. Για $x \in (0, 2)$ η G είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left[\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right]' = \left[\frac{H(x)}{x} \right]' - F'(x) \\ &= \left[\frac{H(x)}{x} \right]' - F'(x) = \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) \\ &= \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

γ. (1^{ος} τρόπος)

Θα εφαρμόσουμε Θ . Rolle για την G στο $[0, 2]$

- η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$

- η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

- $\left\{ \begin{array}{l} G(0) = 3 \\ G(2) = \frac{H(2)}{2} - F(2) + 3 = 3 \end{array} \right.$, διότι $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [t \cdot f(t) - 2f(t)]dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 t \cdot f(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{H(2)}{2} - F(2) = 0$

από Θ . Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ ώστε $G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$.

(2^{ος} τρόπος)

Με άτοπο: Αν $H'(x) \neq 0 \Leftrightarrow G'(x) \neq 0$ στο $(0,2)$ και αφού η G' είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$, οπότε η G θα είναι γνησίως μονότονη στο $[0,2]$.

$$\text{Έχουμε } 0 < 2 \Rightarrow \begin{cases} G(0) < G(2) \\ \text{ή} \\ G(0) > G(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < 3 \\ \text{ή} \\ 3 > 3 \end{cases}$$

Οπότε είτε είναι αύξουσα είτε φθίνουσα καταλήγουμε σε άτοπο.

δ. Θα εφαρμόσουμε Θ. Μ.Τ. για την G στο $[0,2]$

• η G είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$

• η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \stackrel{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} -\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt.$$