

## Απαντήσεις Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 2008

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Α.1 Θεωρία σελ. 235

Α.2 Θεωρία σελ. 191

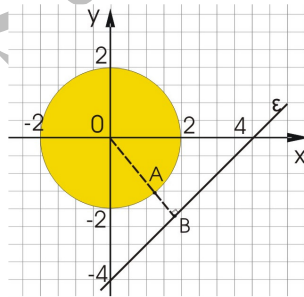
Β.  $\alpha \rightarrow \Sigma$   $\beta \rightarrow \Sigma$   $\gamma \rightarrow \Lambda$   $\delta \rightarrow \Lambda$   $\epsilon \rightarrow \Sigma$ **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

α.  $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |2\sqrt{2} + i||z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$ , άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι κύκλος κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = 2$ .

β. Έστω  $M(x, y)$  εικόνα του  $w$  τότε:  $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)| \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x - y - 4 = 0$ , δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $w$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $x - y - 4 = 0$ .

γ.  $|w|_{\min} = (OB) = d(O, \epsilon) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ .

δ.  $|z - w|_{\min} = |d(O, \epsilon) - \rho| = 2\sqrt{2} - 2$ .



**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

α.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{-\infty}{+\infty} \right)^{\text{d'H}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

και  $f(0) = 0$  επομένως η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

β. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \ln x + 1$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  επομένως

$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$  και γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  επομένως

$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$ . Δηλαδή  $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ ,

οπότε  $f([0, +\infty)) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .

x	0	1/e	+∞	
f'	=	-	0	+
f	=	↘	↗	
	0	-1/e	+∞	

γ.  $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, x > 0$ .

x	0	1/e	+∞	
g'	=	-	0	+
g	=	↘	↗	
	-α	-α-1/e	+∞	

- Αν  $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$ , τότε η εξίσωση 2 ρίζες, στα  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$  και  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .
- Αν  $\alpha > 0$ , τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .
- Αν  $\alpha = 0$ , τότε  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (αφού  $x \neq 0$ ).
- Αν  $\alpha < -\frac{1}{e}$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν  $\alpha = -\frac{1}{e}$ , τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την  $x = \frac{1}{e}$ .

δ. Για κάθε  $x > 0$  αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα

$[x, x+1]$ , επομένως υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$ , ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$  αλλά

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ , επομένως  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε:

$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

α. Έστω  $k = \int_0^2 f(t)dt$ , τότε  $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$

$$\text{Άρα } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)k - 45]dx \Leftrightarrow k = k \left[ \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 - 45[x]_0^2 = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 46k - 90 = k \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$$

β. Για το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$  θέτω  $-h = u$ , τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} \stackrel{\text{2ος ορισμός}}{=} g''(x).$$

γ. i.

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \left( \frac{0}{0} \right)^{\text{d'H}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{2h} \stackrel{\text{από(β)}}{=} \\ = \frac{1}{2}g''(x) + \frac{1}{2}g''(x) = g''(x) \end{cases}$$

Άρα  $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow (g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)'$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$  και επειδή  $g'(0) = 1$ , τότε  $c = 1$ , δηλαδή  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$  οπότε  $g'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $g(x) = x^5 + x^3 + x + c$  και επειδή  $g(0) = 1$ , τότε  $c = 1$ , δηλαδή  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ .

ii.  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  επομένως και 1 - 1.