ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σελ. 217
Β. Θεωρία σελ. 247
Γ. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό
δ. Λάθος (βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική παράσταση)
ε. Λάθος (π.χ. $f(x)=x^3$ στο $(-1,1)$)

ΘΕΜΑ 2ο

α. $w=3z-i\bar{z}+4=3(\alpha+\beta i)-i\overline{(\alpha+\beta i)}+4=3(\alpha+\beta i)-i(\alpha-\beta i)+4=$
$=3\alpha+3\beta i-\alpha i-\beta+4=3\alpha-\beta+4+(3\beta-\alpha)i$.
Άρα: Re(w)=3α–β+4 , Im(w)=3β–α.

β. Για να κινούνται οι εικόνες του z στην ευθεία με εξίσωση y=x–2 πρέπει να ισχύει : β=α–2
Όμως οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, οπότε ισχύει :
$3\beta-\alpha=3\alpha-\beta+4-12 \Leftrightarrow 3\beta+\beta=3\alpha+\alpha-8 \Leftrightarrow 4\beta=4\alpha-8 \Leftrightarrow \beta=\alpha-2$

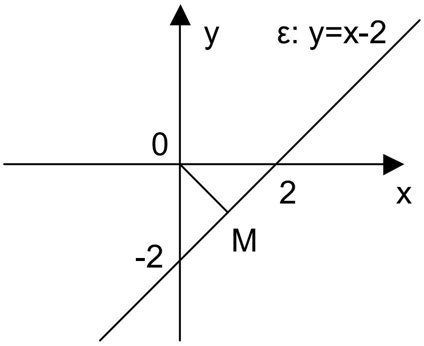
γ. **<u>1ος τρόπος</u>**
Εάν $z=\alpha+\beta i$ τότε $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Εφόσον ζητάμε ο z να έχει ελάχιστο μέτρο αρκεί ο το $|z|^2$ να γίνει ελάχιστο . Όμως οι εικόνες του z κινούνται πάνω στην ευθεία με εξίσωση y=x–2 , οπότε $\beta=\alpha-2$ και $z=\alpha+(\alpha-2)i$.
Άρα $|z|^2=\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(\alpha-2)^2$. Έστω η συνάρτηση :
$f(x)=x^2+(x-2)^2 \Leftrightarrow f(x)=x^2+x^2-4x+4 \Leftrightarrow f(x)=2x^2-4x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Είναι : $f'(x)=4x-4$ και έχουμε τον διπλανό πίνακα :
Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ που είναι $f(1)=2-4+4=2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{2}$ ελάχ.	$\nearrow$

Επειδή $|z|^2=f(\alpha)$, ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι αυτός που προκύπτει για α = 1, δηλαδή $z=1-1i$

<u>2ος τρόπος</u>



Εάν Μ(α,β) είναι η εικόνα του μιγαδικού z τότε το $|z| = (OM)$ και Μ σημείο της ευθείας y=x–2.
Εφόσον ζητείται το ΟΜ να γίνει ελάχιστο πρέπει το ΟΜ να είναι κάθετο στην ευθεία y=x–2.
Ο ζητούμενος μιγαδικός είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και ΟΜ. $\lambda_\varepsilon = 1$ και επειδή $\varepsilon \perp OM$ είναι $\lambda_{OM} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα $OM: \ y = -x$. Οπότε :

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad z = 1 - i$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική με $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$ και είναι :

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (αφού $10x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Επίσης έχει σημείο καμπής το (0, 0).

Για να είναι η f αντιστρέψιμη πρέπει να είναι 1-1. Επειδή είναι γνησίως αύξουσα τότε θα είναι και 1-1 (Σχολικό Βιβλίο σελ. 153)

β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - (1 + x)$, $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο IR με $g'(x) = e^x - 1$ και

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$,

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄(x)	–	0	+
g(x)	↘	$\boxed{0}$ ελάχ.	↗

Από τον πίνακα προσήμου φαίνεται ότι η g έχει ολικό ελάχιστο για x = 0 το g(0) . Οπότε: $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - (1 + x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε: $e^x \geq 1 + x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(e^x) \geq f(1 + x)$

γ. Γνωρίζουμε ότι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} είναι η ευθεία y = x .
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι :
$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=x$, αφού $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

δ. **<u>1ος τρόπος</u>**

Θα βρούμε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τον x΄x . Εφόσον το (0,0) είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας y = x άρα είναι σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$. Δηλαδή η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον x΄x στο (0,0) . Δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο της $C_{f^{-1}}$ με τον x΄x , γιατί η f^{-1} είναι 1-1 .

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E=\int_0^3 |f^{-1}(y)|\,dy$

Η f και η f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας , άρα και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $y \geq 0 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \geq 0$, οπότε $E=\int_0^3 f^{-1}(y)\,dy$.

Θέτουμε $x=f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow y=x^5+x^3+x$ και $dy=(5x^4+3x^2+1)dx$

Για $y=0 \Rightarrow x^5+x^3+x=0 \Leftrightarrow x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ και

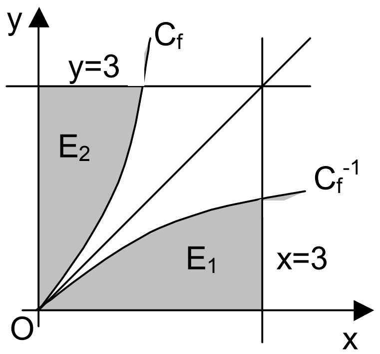
για $y=3 \Rightarrow x^5+x^3+x=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x-3=0 \Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 (*)$

Άρα : $E=\int_0^3 f^{-1}(y)\,dy=\int_0^1 x(5x^4+3x^2+1)\,dx=\int_0^1 (5x^5+3x^3+x)\,dx=$

$$=\left[\frac{5x^6}{6}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}+\frac{6}{12}=\frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

<u>2ος τρόπος</u>



Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x . Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=3 είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τον άξονα y΄y και την ευθεία y=3.
Η f είναι κυρτή στο [0, +∞) οπότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη y=x , ενώ η συμμετρική $C_{f^{-1}}$ είναι κάτω από την y=x.
Τα κοινά σημεία των C_f και y=3 είναι:

$f(x)=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x-3=0 \Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 (*)$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_0^1|3-f(x)|\,dx=\int_0^1(3-f(x))\,dx=\int_0^1\left[3-(x^5+x^3+x)\right]dx=\int_0^1(-x^5-x^3-x+3)\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=-\frac{2}{12}-\frac{3}{12}-\frac{6}{12}+3=-\frac{11}{12}+\frac{36}{12}=\frac{25}{12}\ \text{τ.μ.}$$

*** Σημείωση**

Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την x=1 γιατί η f είναι 1-1 και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, συνεπώς και η y=3 τέμνει τη C_f σε μοναδικό σημείο.

ΘΕΜΑ 4ο

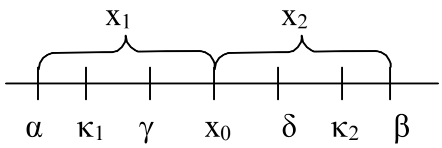
α. Έστω (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι γ < δ

Τότε στο διάστημα [γ,δ] ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano για την f, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\gamma,\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=0$, άρα στο (α,β) η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

β. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\alpha<x_0<\beta$.

Επομένως αφού $f(\alpha)=f(x_0)=f(\beta)$ στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχουν $x_1\in(\alpha,x_0)$ με $f'(x_1)=0$ και $x_2\in(x_0,\beta)$ με $f'(x_2)=0$.

Από το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα [α,γ] και [δ,β] έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον



$\kappa_1\in(\alpha,\gamma)$ με $f'(\kappa_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}$ και

$\kappa_2\in(\delta,\beta)$ με $f'(\kappa_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=\dfrac{-f(\delta)}{\beta-\delta}$

Οπότε : $f'(\kappa_1)\cdot f'(\kappa_2)=\dfrac{-f(\gamma)f(\delta)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)}>0$.

Επειδή $x_1\in(\alpha,x_0)$ και $\kappa_2\in(\delta,\beta)$ άρα $x_1<\kappa_2$

- Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f΄ στο $[x_1,\kappa_2]$ υπάρχει $\xi_1\in(x_1,\kappa_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=\dfrac{f'(\kappa_2)-f'(x_1)}{\kappa_2-x_1}=\dfrac{f'(\kappa_2)}{\kappa_2-x_1}$
- Όμοια εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f΄ στο $[\kappa_1,x_2]$ υπάρχει $\xi_2\in(\kappa_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=\dfrac{f'(x_2)-f'(\kappa_1)}{x_2-\kappa_1}=\dfrac{-f'(\kappa_1)}{x_2-\kappa_1}$

Άρα : $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)=\dfrac{-f'(\kappa_2)f'(\kappa_1)}{(\kappa_2-x_1)(x_2-\kappa_1)}<0$

Η τελευταία δηλώνει ότι οι $f''(\xi_1)$, $f''(\xi_2)$ είναι ετερόσημες και χωρίς βλάβη , μπορούμε να θεωρήσουμε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

γ. Από το β ερώτημα , εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano για την f'' στο $[\xi_1,\xi_2]$ έχουμε : Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq(\alpha,\beta)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Το σημείο x_0 θα ήταν σημείο καμπής της συνάρτησης εφόσον η f'' άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.
Έπρεπε να δοθεί στα δεδομένα να δειχθεί ότι υπάρχει ΠΙΘΑΝΟ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.